日本ファジィ学会誌 Vol.3 No.3 pp 452〜pp 463

連載

ファジィ測度論入門〔IV〕†

室伏 俊明* 菅野 道夫*

3. 測度論の基礎

今回は次回の準備として，ファジィでない，通常の測度と積分(Lebesgue積分)について概説する．限られたページ数で説明するので，数学的に非常に雑な議論をしているところもある．詳しくは一般の測度論の教科書を参照されたい．

3.1 測度とは

本節では，測度の意味とその数学的性質について，具体例を通して説明する．数学的定義は次節で述べる．

測度とは，集合 A に対して A の大きさを表す数値 $\mu(A)$ を対応させる関数 μ であり，長さ，面積，体積，質量などの外延量の数学的表現である．ここで，外延量とは上にあげたような広がりに規定される量をいう(これに対して，速度，濃度，密度などの内包量と呼ばれる量もある)．

集合の要素の数も外延量であり，測度で測れる．

[例 3.1.1] 空でない集合 X に対して，

$$\mu(A) \triangleq (A \text{ の要素の個数}) \quad \forall A \subset X$$

と定める．例えば，$X=\{\bigcirc, \circledcirc, \square, \diamond, \triangle, \triangledown\}$ のとき，$A=\{\circledcirc, \bigcirc, \square\}$, $B=\{\triangle, \triangledown\}$ とすると，$\mu(A)=3$, $\mu(B)=2$ である(図 3.1.1)．この μ は counting measure と呼ばれる測度である．

次のような場合，重さを集合の大きさと見なすこともできる．

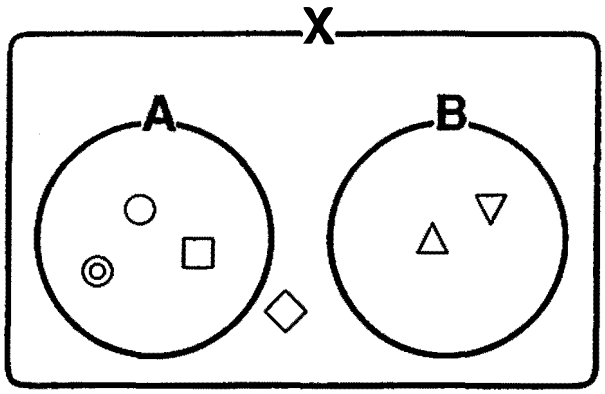


図 3.1.1 counting measure ; $\mu(A)=3$, $\mu(B)=2$

[例 3.1.2] $X=\{$石$_1$, 石$_2$, …, 石$_n\}$ (n 個の石からなる集合)とし，A を X の部分集合とする．

$\mu(A) \triangleq (A$ の重さ$)$
$=(A$ に属している石の重さの合計$)$

とする．石$_i$の重さを w_i とすると，

$$\mu(A)=\sum_{\text{石}_i \in A} w_i$$

である(図 3.1.2 参照)．この μ は測度である．

面積も集合の大きさといえる．

[例 3.1.3] R^2 を 2 次元 Euclid 空間とし，R^2 の部分集合(領域) A に対して，

$$\mu(A) \triangleq (\text{領域 } A \text{ の面積})$$

† An Introduction to Fuzzy Measure Theory (IV)
Toshiaki MUROFUSHI and Michio SUGENO

* 東京工業大学大学院 総合理工学研究科 システム科学専攻
Dept. of Systems Science, Tokyo Institute of Technology

と定める．例えば，$A=(a, b]\times(c, d]$ ならば

$$\mu(A)=(b-a)\cdot(d-c)$$

である(図 3.1.3)．この μ も測度である．

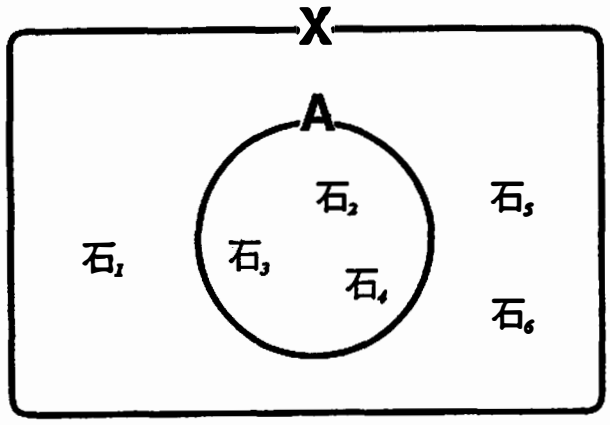


図 3.1.2　$\mu(A)=w_2+w_3+w_4$

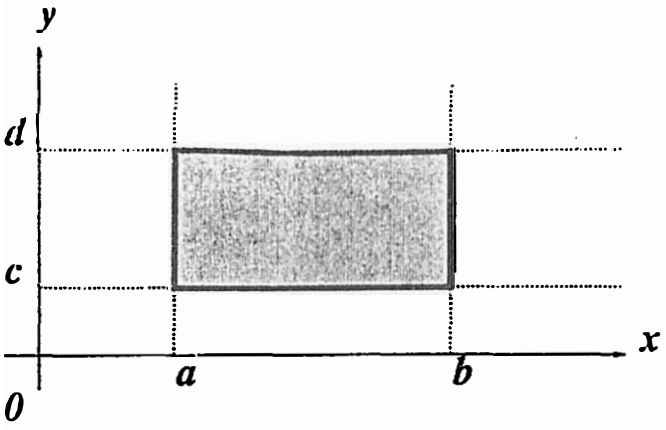


図 3.1.3　$(a, b]\times(c,d]$

測度の本質は，その加法性にある．加法性を数式で書くと

$$A\cap B=\emptyset \Rightarrow \mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$$

となる．例えば，例 3.1.1 では，$A\cap B=\emptyset$，$\mu(A)=3, \mu(B)=2, \mu(A\cup B)=5$ なので，加法性が成立している．例 3.1.2 の μ も加法性を満たすのは明らかだろう．例 3.1.3 の面積の加法性も明らかだろう(図 3.1.4)．

測度の値は非負の実数である．ここでは集合の大きさとして日常的なふつうの「大きさ」だけを考えているので，負の値をとるような「大きさ」

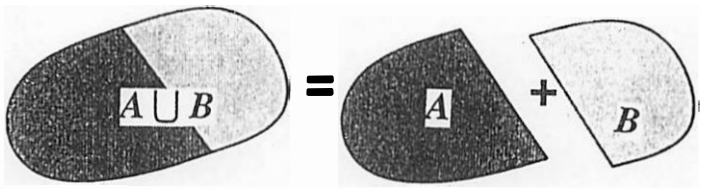


図 3.1.4　面積の加法性；$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$

は扱わない．

空集合の測度は 0 である；$\mu(\emptyset)=0$．これは測度が集合の大きさを測っていることから，当然と言える．また，加法性の式で $A=\emptyset$ とすると，

$$\mu(B)=\mu(\emptyset)+\mu(B)$$

となり，$\mu(B)<\infty$ ならば $\mu(\emptyset)=0$ となる．

測度のもう 1 つの性質に連続性がある．これは，集合の微小の変化に対して，その測度(大きさ)も微小に変化し，急激には変化しないということである．このことは，例 3.1.3 では面積の連続性と言い換えることができる．すなわち，ある図形が次第に大きくなり，別の図形 A に限りなく近づいていくと，それにつれてその面積も図形 A の面積に限りなく近づいていく(図 3.1.5)．集合が小さくなりながら，別の図形に近づいていく場合も同様である．

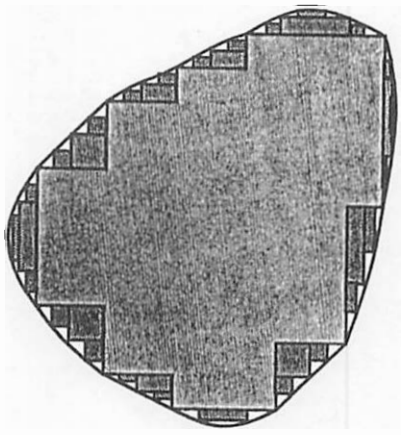


図 3.1.5　面積の連続性

測度の連続性は，数学的には

(CFB) $A_n\uparrow A \Rightarrow \mu(A_n)\uparrow\mu(A)$,
(CFA) $A_n\downarrow A$, $\mu(A_m)<\infty$ for some m
$\Rightarrow \mu(A_n)\downarrow\mu(A)$.

と表現される．(CFB)は下からの連続性，(CFA)は上からの連続性と呼ばれる．$A_n \uparrow A$ は，$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ かつ $A = \cup_n A_n$を意味し，$a_n \uparrow a$ は，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ かつ $a = \lim_{n\to\infty} a_n$を意味する．同様に $A_n \downarrow A$ は $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ かつ $A = \cap_n A_n$ を，$a_n \downarrow a$ は $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$ かつ $a = \lim_{n\to\infty} a_n$を意味する．ここで，

$$\cup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A \cup \cdots,$$

$$\cap_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots,$$

である．

最後に counting measure を使って連続性の説明をしよう．$X = \{1,2,3,\cdots\}$, μ を X 上の counting measure とする．まず μ の下からの連続性の例をあげる．$A_n \triangleq \{1,2,\cdots,n\}$ $\forall n$ とおくと，$A_n \uparrow X$ であり，$\mu(A_n) = n$ $\forall n$, $\mu(X) = \infty$ なので，$\mu(A_n) \uparrow \mu(X)$ となり，下からの連続性が成立している．次に，上からの連続性(CFA)から条件 $\mu(A_m) < \infty$ for some m は除けないことを示す．$B_n \triangleq \{n, n+1, \cdots\}$ $\forall n$ とおくと，$B_n \downarrow \varnothing$ だが $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \infty \neq 0 = \mu(\varnothing)$ となっている．このとき $\mu(B_n) = \infty$ $\forall n$ なので(CFA)の条件は満たされていない．

3.2 測度の数学的定義

測度を数学的に定義するには，測度の定義域から順番に定義していかなければならない．

[定義 3.2.1] X を空でない集合とする．$\boldsymbol{A}$ が X の部分集合からなる**集合体**(Boolean algebra, field of sets)であるとは，

(s 1) $\varnothing \in \boldsymbol{A}$, $X \in \boldsymbol{A}$,
(s 2) $A, B \in \boldsymbol{A} \Rightarrow A \cup B$, $A \cap B$, $A^c \in \boldsymbol{A}$,

を満たすことをいう．$\boldsymbol{A}$ が X の部分集合からなる **σ-集合体**(σ-algebra, σ-field)であるとは，$\boldsymbol{A}$ が次の条件を満たす集合体であることをいう：

(s 3) $\{A_n\} \subset \boldsymbol{A} \Rightarrow \cup_n A_n, \cap_n A_n \in \boldsymbol{A}$.

ここで，$\{A_n\}$は集合の可算無限個の列$\{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$を意味する．

$\boldsymbol{A}$ を X の部分集合からなるある σ-集合体とする．このとき，組$(X, \boldsymbol{A})$を**可測空間**(measurable space)という．$\boldsymbol{A}$ の要素を**可測集合**(measurable set)と呼ぶ．

$(X, \boldsymbol{A})$を可測空間とするとき，μ が $\boldsymbol{A}$ 上の測度(measure)であるとは，μ が $\boldsymbol{A}$ から $[0, \infty]$ への関数であって，

(m 1) $\mu(\varnothing) = 0$,
(m 2)加法性：$A, B \in \boldsymbol{A}$, $A \cap B = \varnothing$
$\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
(m 3)下からの連続性：
$\{A_n\} \subset \boldsymbol{A}$, $A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$,

を満たすことをいう．μ が $\boldsymbol{A}$ 上の測度のとき，$(X, \boldsymbol{A}, \mu)$を**測度空間**(measure space)と呼ぶ．

(σ-)集合体とは，部分集合の集まりであり，その中で自由に集合演算$\cup$, $\cap$, ^{c} ができるものだと思えばよい．もちろん，厳密には全くの自由ではなく，演算に使われる部分集合の個数に制限がある．集合体の場合は有限個，σ-集合体の場合は可算無限個の部分集合の演算が自由にできるだけである．例えば，$\{\varnothing, X\}$や 2^X は σ-集合体である．なお，2^X は X のべき集合，すなわち X の部分集合全体からなる集合である．

上述の集合体，σ-集合体の定義は冗長であり，もっと簡潔にできる(de Morgan の法則を使う)．ここでは$\varnothing$と X，$\cup$と$\cap$の対称性を明確にするため，上の形にした．

集合体は，Boole 代数，有限加法族などとも呼ばれる．σ-集合体は，σ-代数，σ-加法族，加算加法族，完全加法族，Borel 集合族などともばれる．

可測とは，「大きさを測ることができる」，「測度が定義できる」という意味である．

注：可測空間(測度の定義域)について

(可測空間として$(X, 2^X)$だけをイメージしてもらっても何とかなるので，この注は読まずに飛ばしてもよい)．

測度をいつでもべき集合 2^X の上に定義できれば，σ-集合体や可測空間などという面倒くさい概念を持ち出す必要はない．しかし，我々が扱いた

い測度はいつでもべき集合上に定義できる訳ではないので，測度の定義域を 2^X でなく，一般にそれより小さな σ-集合体 $\boldsymbol{A}$ にするのである．例えば例 3.1.3 の式

$$\mu((a,b]\times(c,d])=(b-a)\cdot(d-c)$$

を満たす $2^{R\times R}$ 上の測度は存在しない．このことを直観的に説明すると次のようになる．まず，$(a,b]\times(c,d]$ の形の集合は，上の式で測度が定められる．$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ の部分集合 A と B の測度が定まり，$A\cap B=\emptyset$ なら，加法性より $A\cup B$ の測度が $\mu(A)+\mu(B)$ と定まる．また，A と B の測度が定まり，$A\subset B$ で $\mu(A)<\infty$ なら，加法性より $B-A$ の測度も $\mu(B)-\mu(A)$ と定まる．さらに，$A_1, A_2, \cdots$ の測度が定まり，$A_1\subset A_2\subset\cdots$ ならば，連続性により $\cup_n A_n$ の測度も $\lim\mu(A_n)$ と定まる... このような操作を繰り返していくと，測度の定まった部分集合がどんどん増えていく．しかし，あるところでその増加は止まってしまう．すなわち，あるところからは，他の部分集合の測度を定めようとしても，つじつまが合うようには定められなくなるのである．無理に定めようとすると，μ が加法性や連続性を満たさなくなってしまう．そこで，すべての部分集合に測度を定めるのは止めて，μ が測度として成立する範囲（σ-集合体 $\boldsymbol{A}$）だけで議論しようというわけである．これは非常に雑な説明だが，だいたいこんな感じと思っていただいてよいだろう．

では次に，なぜ測度の定義域を σ-集合体（補集合，可算個の合併集合と共通集合の演算に関して閉じている部分集合の集まり）にするのかについて述べよう．μ を測度としてうまく定められる部分集合の範囲を $\boldsymbol{A}'$ とすると，上での議論から

$$\begin{aligned}&A, B\in\boldsymbol{A}',\ A\cap B=\emptyset \Rightarrow A\cup B\in\boldsymbol{A}',\\ &A, B\in\boldsymbol{A}',\ A\subset B \Rightarrow B-A\in\boldsymbol{A}',\\ &\{A_n\}\subset\boldsymbol{A}', A_n\uparrow A \text{ or } A_n\downarrow A \Rightarrow A\in\boldsymbol{A}'\end{aligned}$$

となるべきである．ここで，(s 2) の下で，(s 3) と (s 3') $\{A_n\}\subset\boldsymbol{A}, A_n\uparrow A$ or $A_n\downarrow A \Rightarrow A\in\boldsymbol{A}$ は同値であることに注意されたい．また，空集合の測度は 0 だから，$\emptyset\in\boldsymbol{A}'$ となる．しかし，

$$A, B\in\boldsymbol{A}' \Rightarrow A\cup B, A\cap B\in\boldsymbol{A}',\ X\in\boldsymbol{A}'$$

は導かれない．演算 $\cap$, $\cup$ に関して閉じていて，全体集合 X を含むことの 1 つの理由は，測度のもともと定められている部分集合の集まり $\boldsymbol{P}$ ー例 3.1.3 では $(a,b]\times(c,d]$ の形の集合の有限個の直和（互いに素な集合の合併集合）の全体 $\boldsymbol{P}$ ーは大抵 $\cap$ と $\cup$ に関して閉じており，さらに大抵 $X_n\uparrow X$ となるような $\{X_n\}\subset\boldsymbol{P}$ があるということである．もう 1 つの理由は，集合演算が自由にできる方が数学的に便利だからである（こっちの方が根本的な理由）．どう便利かは 3.5 節の可測関数のところで例を示す．

次に測度の定義に解説を加えよう．

測度の定義には上述のものとは別の方法もある．他の教科書などを参照されたい．

前節で (m 1) $\mu(\emptyset)=0$ は (m 2) の加法性から導かれたが，ここでは測度の値として ∞ も認めているので，公理として (m 1) が必要になる．$\mu(A)=\infty\ \ \forall A\in\boldsymbol{A}$ $(\mu(\emptyset)=\infty$ に注意) なる μ を排除するため (m 1) が必要なのである．

上からの連続性 (CFA) は公理 (m 1-m 3) から導かれる．

$\boldsymbol{A}$ の要素が有限個のとき（例えば X が有限集合のとき）は，連続性のための条件 (s 3), (m 3) はあってもなくても同じである．また，X が有限集合のときは $\boldsymbol{A}=2^X$ とするのが普通である．

3.3 測度の例 (Lebesgue 測度と確率測度)

[例 3.2.1] $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とし，$\boldsymbol{L}$ を $\boldsymbol{R}$ の Lebesgue 可測集合の全体とする（$\boldsymbol{L}=2_R$ と思ってもよい．前節の注を読んだ方は下の注 1 を参照されたい）．$\boldsymbol{L}$ 上の測度 μ で

$$\begin{aligned}\mu((a,b))=\mu((a,b])=\mu([a,b))\\ =\mu([a,b])=b-a\ (3.3.1)\end{aligned}$$

（ただし，$a\leqq b$）となるものがただ一つある．この

μ はLebesgue測度と呼ばれる(注2参照). Lebesgue測度は, R の部分集合の大きさ(長さ)を与える. 空集合の長さは0, すなわち $\mu(\emptyset)=0$ である. また, $a\leqq b\leqq c$ とすると,

$$(a,b]\cap(b,c]=\emptyset,$$
$$(a,c]=(a,b]\cup(b,c],$$
$$c-a=(b-a)+(c-b)$$

なので, 加法性

$$\mu((a,c])=\mu((a,b])+\mu((b,c])$$

が成り立っている(図3.3.1参照).

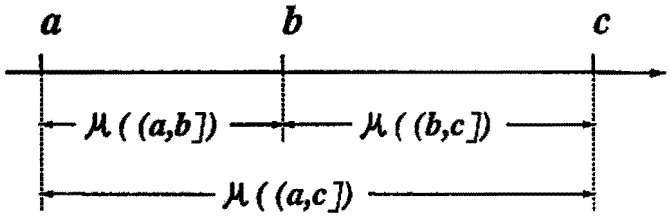


図3.3.1 $\mu((a,c])=\mu((a,b])+\mu((b,c])$

数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$を,

$$a_n\downarrow a,\quad b_n\uparrow b,\quad a_n\leqq b_n\ \forall_n,$$

なるものとする(例えば, $a=0$, $b=3$, $a_n=1/n$, $b_n=3-1/n$). このとき,

$$A_n\triangleq(a_n,b_n)\ \forall n,\quad A\triangleq(a,b)$$

とすると,

$$\mu(A_n)=b_n-a_n\quad\forall n,$$
$$\mu(A)=b-a,$$
$$A_n\uparrow A$$

である. $a_n\downarrow a$, $b_n\uparrow b$ より,

$$(b_n-a_n)\uparrow(b-a)$$

なので, 下からの連続性

$$\mu(A_n)\uparrow\mu(A)$$

が成り立っている(図3.3.2参照).

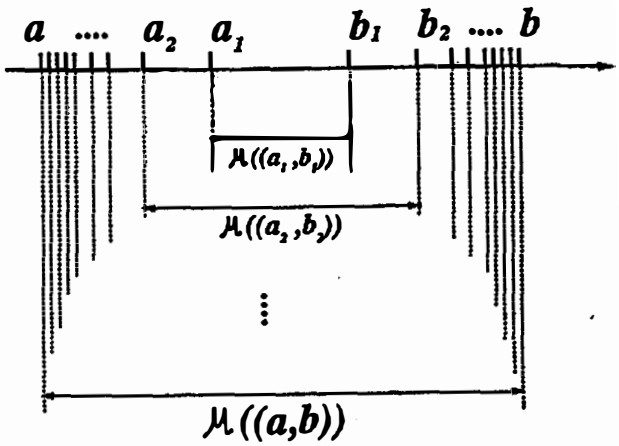


図3.3.2 測度(長さ)の連続性

以下, <で(または [を, >で)または] を表す. すなわち, <a,b>は(a,b), [a,b], (a,b], [a,b)のいずれでもよいとする. このとき式(3.3.1)は, 1つの等式

$$\mu(<a,b>)=b-a$$

にまとめられる.

注1. Lebesgue可測集合について.

雑な言い方をすると, 半開区間$(a,b]$の測度$\mu((a,b])$を$(b-a)$と定めて, μの加法性と連続性を保ったまま3.2節の注の様にμの定義域を拡張していったとき, これ以上拡張するとμが測度でなくなってしまうぎりぎりのところの定義域がσ-集合体Lである. $L\subsetneqq 2_R$であるが, 我々が扱う集合はたいていLebesgue可測(Lの要素)なので, ほとんど$L=2_R$のつもりでいてもよい. Lebesgue可測でない集合は, 公理的集合論の選択公理を使ったりして, かなり無理をしなければ作れないのである.

Lebesgue可測集合の定義やLとべき集合の関係は, 以下の例3.3.2, 3.3.3でも同様である.

注2. n次元Euclid空間R^nにおいて, 集合の自然な大きさ(1次元では長さ, 2次元では面積, 3次元では体積)を与える測度をLebesgue測度という. 測度論において, 「Lebesgue積分」は一般的な積分を指す言葉だが, 「Lebesgue測度」はR^nの特定な測度を指す言葉なので注意されたい.

[例 3.3.2] $\boldsymbol{R}^2$を 2 次元Euclid空間，Lを$\boldsymbol{R}^2$のLebesgue可測集合全体とする．L上の測度μで

$$\mu(<a,b>\times<c,d>)=(b-a)\cdot(d-c)$$

(ただし，$a\leqq b$，$c\leqq d$)となるものがただ1つある．このμは$\boldsymbol{R}^2$上のLebesgue測度と呼ばれる．μは$\boldsymbol{R}^2$の部分集合の大きさ(面積)を与える(例 3.1.3 参照)．

[例 3.3.3] $\boldsymbol{R}^3$を 3 次元Euclid空間，Lを$\boldsymbol{R}^3$のLebesgue可測集合全体とする．L上の測度μで

$$\mu(<a,b>\times<c,d>\times<e,f>)=(b-a)\cdot(d-c)\cdot(f-e)$$

(ただし，$a\leqq b$，$c\leqq d$，$e\leqq f$)となるものがただ1つある(図 3.3.3)．μは$\boldsymbol{R}^3$上のLebesgue測度と呼ばれ，$\boldsymbol{R}^3$の部分集合の大きさ(体積)を与える．μの加法性と連続性は，面積や長さなどと同様，直観的に明らかだろう．

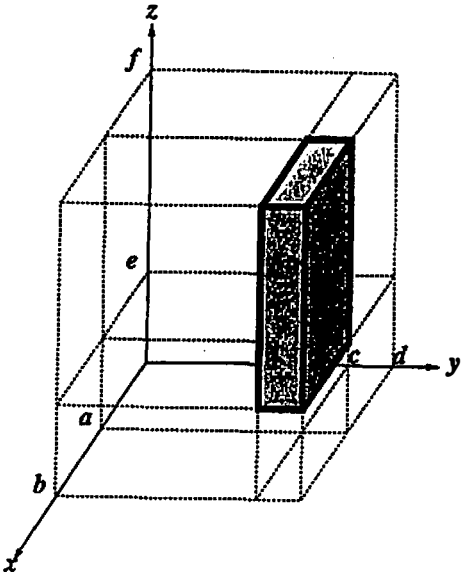


図 3.3.3 $<a,b>\times<c,d>\times<e,f>$

[例 3.3.4] 全体集合Xの測度が1の測度Pを確率測度という．いわゆる客観確率(もしくは頻度確率)が，(m 1)$P(\emptyset)=0$ と(m 2)加法性を満たす(べき)ことは明らかだろう．(m 3)の連続性は，大数の強法則の導入に際して必要になる．詳しくは確率論の教科書を参考にされたい．

3.4 測度の数学的性質

測度の数学的性質を簡単にまとめておく．

・単調性：$A,B\in\boldsymbol{A}$，$A\subset B$

$$\Rightarrow\mu(A)\leqq\mu(B).$$

次の性質は3.2の注でも使った．

・$A,B\in\boldsymbol{A}$，$A\subset B$，$\mu(A)<\infty$

$$\Rightarrow\ \mu(B-A)\ =\ \mu(B)-\mu(A).$$

次の性質は(m 2)＋(m 3)と同値であり，測度の定義として(m 2)，(m 3)の代りに使われることが多い．

・σ-加法性(可算加法性)：

$$\{A_n\}\subset\boldsymbol{A},\ A_i\cap A_k=\emptyset\ \text{for}\ i\neq k$$
$$\Rightarrow\ \ \mu(\cup_n A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

次の性質は3.1，3.2でも説明した．

・上からの連続性：

$$\{A_n\}\subset\boldsymbol{A},\ A_n\downarrow A,\ \mu(A_m)<\infty\ \text{for some}\ m$$
$$\Rightarrow\ \ \mu(A_n)\downarrow\mu(A).$$

測度についての節の最後なので，繰り返しになるが，ここでもう一度強調しておきたい．「測度の測っているものは外延量(広がりに規定される量)であり，その本質は(m 2)の加法性にある．」

3.5 Lebesgue積分の数学的定義

[定義 3.5.1] $(X,\boldsymbol{A})$を可測空間とする．関数f：$X\to[-\infty,\infty]$ が**可測**(measurable)であるとは，任意の実数rに対し，$\{x\mid f(x)>r\}\in\boldsymbol{A}$となることをいう．

雑な言い方をすると，関数fが可測とは，fのグラフを横に切ったときの切り口が，どこを切っても可測集合であることである(図 3.5.1 参照)．

注1． 3.2節の注を読まれなかった方は，可測関数は"可測"を取り去っただの関数と思ってそれほど差し支えない．次の注2を読む必要もない．

注2． 測度の定義域$\boldsymbol{A}$をσ-集合体にする1つの理由(3.2節の注の続き)．

$$\{x\mid(f+g)(x)>r\}$$
$$=\bigcup_{q\in Q}[\{x\mid f(x)>q\}\cap\{x\mid g(x)>r-q\}]$$

(Qは有理数全体の集合,有理数全体は可算個である)なので,fとgが可測関数でAがσ-集合体ならば,上式の右辺はAの要素となる.従ってこのとき$(f+g)$も可測関数である.さらに$f\cdot g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ なども可測関数になる.このように,Aがσ-集合体ならば理論内容が豊かになり,数学的議論がスムーズに運ぶのである.

以下,扱う関数はすべて可測とし,いちいち断わらない.

[定義 3.5.2] 値域が$\pm\infty$を含まない有限集合であるような関数を単関数(または階段関数)(simple function)という(図 3.5.2 参照).

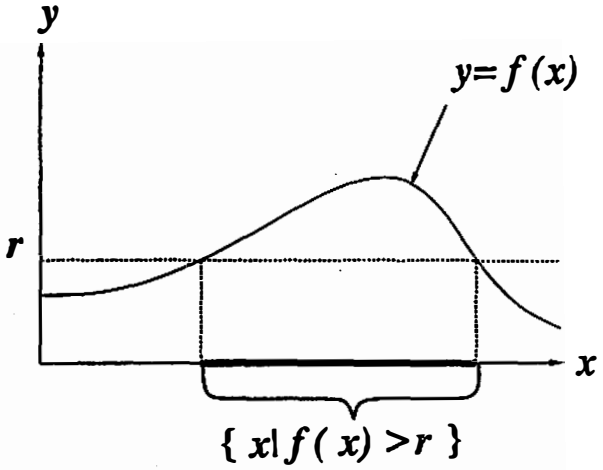


図 3.5.1 関数の可測性

単関数は,次の式で表すことができる:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{D_i}(x) \qquad (3.5.1)$$

ただし,$D_i\cap D_j=\emptyset$ $(i\neq j)$. 1_Dは,集合Dの定義関数(indicator)(特性関数(characteristic function)ともいう)である:

$$1_D(x)\triangleq\begin{cases}1 & x\in D,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

なお,1_DはI_D, χ_Dなどとも書かれる.(3.5.1)式をわかりやすく書くと次の様になる.

$$f(x)=\begin{cases}a_1 & x\in D_1\\ a_2 & x\in D_2\\ \cdots & \cdots\\ a_n & x\in D_n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

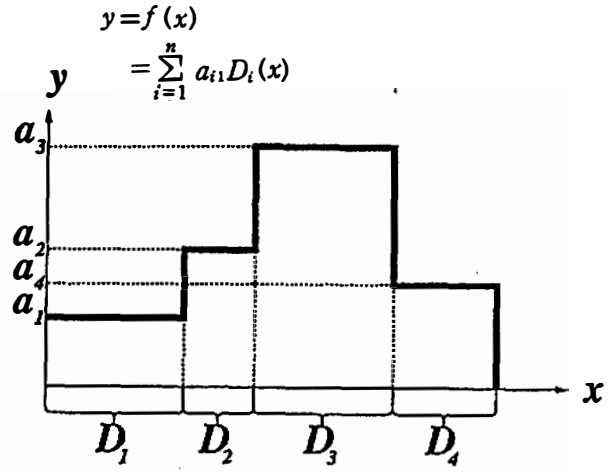


図 3.5.2 単関数fのグラフ

次に定義するLebesgue積分は,全空間Xを積分領域とする定積分である.不定積分ではない.測度論においても不定積分という概念はあるが,ここでは扱わない.

[定義 3.5.3] (X,A,μ)を測度空間とする.可測関数fの測度μに関する積分(Lebesgue積分)$\int f\,d\mu$は次の3段階で定義される.

①$f\geqq 0$ が単関数の場合.fが(3.5.1)式で表されているとき,その積分は次式で定義される:

$$\int f\,d\mu \triangleq\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(D_i), \qquad (3.5.2)$$

(図 3.5.3 参照).上式は,式(3.5.1)の$1_{D_i}(x)$を$\mu(D_i)$に置き換えたものになっている.

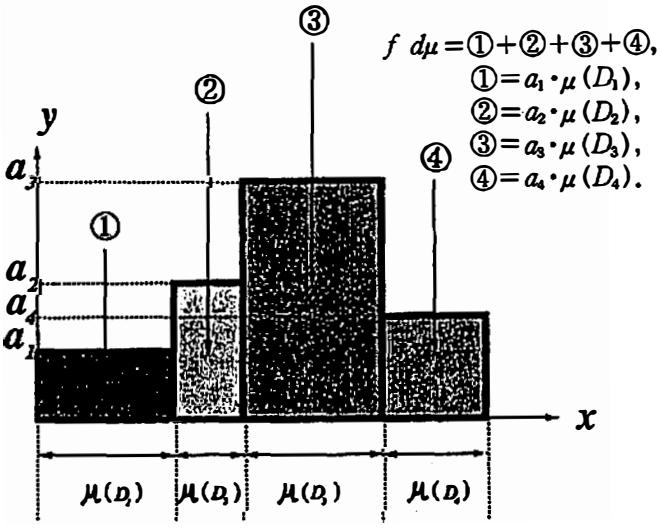


図 3.5.3 単関数f(図 3.5.2)の積分

②$f \geqq 0$ の場合．$0 \leqq g \leqq f$ なるすべての単関数gの積分$\int g\,d\mu$の上限として$\int f\,d\mu$を定める：(図3.5.4参照)

$$\int f\,d\mu \triangleq \sup\{\int g\,d\mu \mid g\text{は単関数}, 0 \leqq g \leqq f\}.$$

ここで，$f \geqq 0$，$g \leqq f$は，それぞれ$f(x) \geqq 0 \ \forall x \in X$，$g(x) \leqq f(x) \ \forall x \in X$を意味する．

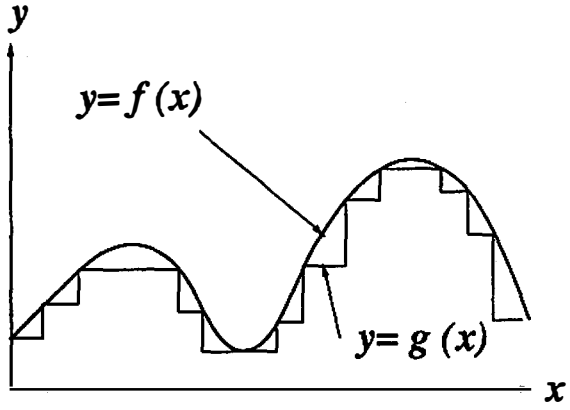


図 3.5.4 関数fと$g \leqq f$なる単関数g

③一般の場合．

$$f^+(x) \triangleq \max(f(x), 0),$$
$$f^-(x) \triangleq \max(-f(x), 0)$$

とおき(図3.5.5参照)，$\int f^+ d\mu < \infty$ または $\int f^- d\mu < \infty$のとき，

$$\int f\,d\mu \triangleq \int f^+ d\mu - f^- d\mu \qquad (3.5.3)$$

と定める．ここで

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

に注意されたい．なお，$\int f^+ d\mu = \int f^- d\mu = \infty$のときは，$\int f d\mu$は定義されない．

注3．上の積分の定義の(3.5.2)，(3.5.3)式で無限大(∞)に関する演算を用いることがある(e.g.，(3.5.2)式では$\mu(D_i) = \infty$の場合もある)．以下に無限大に関する演算をまとめておく．

aを任意の実数(有限値)とする．下の式では，すべて複号同順である．

$$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty) + (\pm\infty)$$
$$= (\pm\infty),$$

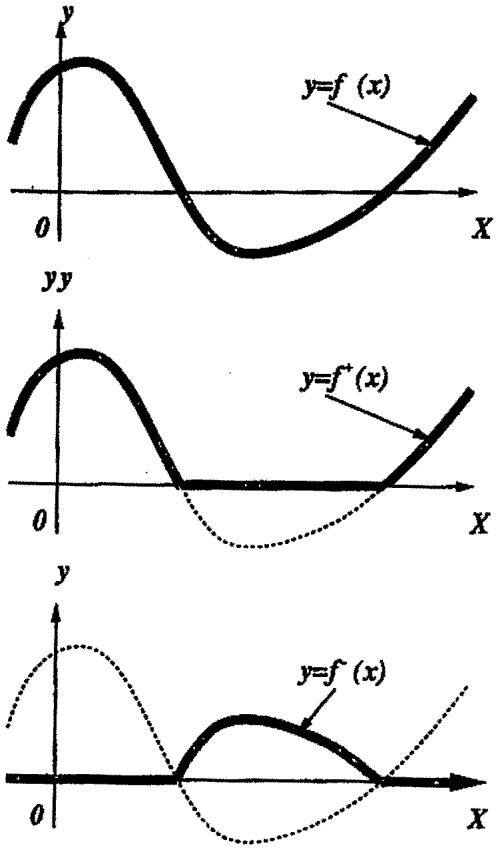


図 3.5.5 関数fとf^+，f^-

$$(\pm\infty) + (\mp\infty) = (\text{定義不能}),$$

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & a > 0, \\ 0 & a = 0, \\ \mp\infty & a < 0, \end{cases}$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty,$$
$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$$
$$a/(\pm\infty) = 0,$$
$$-\infty < a < +\infty.$$

特に，$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$ に注意されたい．

[定義3.5.4] Eを可測集合とするとき，fのE上での積分$\int_E f\,d\mu$は次式で定義される(図3.5.6)．

$$\int_E f\,d\mu \triangleq \int f \cdot 1_E\,d\mu.$$

定義3.5.3の積分は，X上での積分である：

$$\int f\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

積分記法について注意をしておく．$\int f\,d\mu$は，

$$\int f(x)\ d\mu(x),$$

$$\int f(x)\ \mu(x)$$

などと書いたりもする．また，例3.3.1の測度空間(R,L,μ)の場合には，$\int_E f d\mu$ を

$$\int_E f(x)\ dx$$

と書く．さらに積分領域Eが区間$[a,b]$のとき

$$\int_a^b f(x)\ dx \qquad (3.5.4)$$

とも書く．

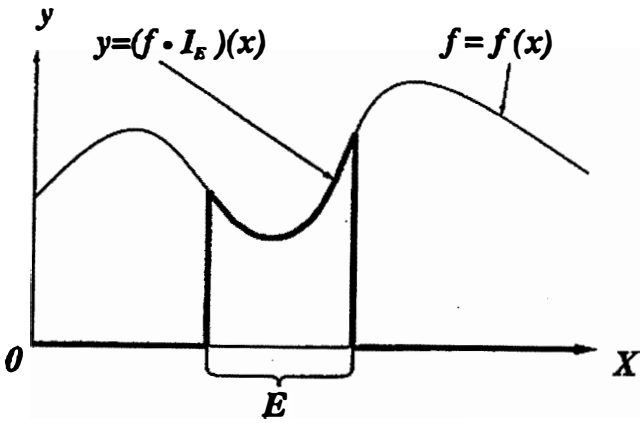


図3.5.6　関数fと$f\cdot 1_E$

注4． Riemann積分とLebesgue積分の関係．

実数軸R上のLebesgue測度に関する積分を(3.5.4)のように書いてしまうと，これまでのふつうの積分(Riemann積分)と区別がつかなくなるが，これにはあまり問題はない．閉区間$[a,b]$上の関数fが狭義Riemann積分可能ならば，Lebesgue測度に関して積分可能であり，それらの積分値は一致するからである．この逆はいえない．すなわち，Lebesugue積分可能だがはRiemann積分不可能な関数が存在する．例えば，Dirichlet関数

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2m}\right)$$

がそうである．これは，xが有理数のとき1，無理数のとき0となる，いたるところ不連続な関数である．Riemann積分は被積分関数のこのような激しい振動に弱い(Dirichlet関数はいたるところで0と1の間を振動している)．これはRiemann積分の定義式

$$\int_a^b f(x)\ dx \triangleq \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

(Δは$[a,b]$の分割$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$|\Delta| \triangleq max_{i=1,n}(x_i-x_{i-1})$，$c_i\in[x_i-1,x_i]$)を見ればわかる(図3.5.7)．積分区間$[a,b]$を$[x_{i-1},\ x_i]$と細切れにして計算するので，区間$[x_{i-1},x_i]$をいくら狭くしても追い着けない激しい振動には対処の仕様がないのである．

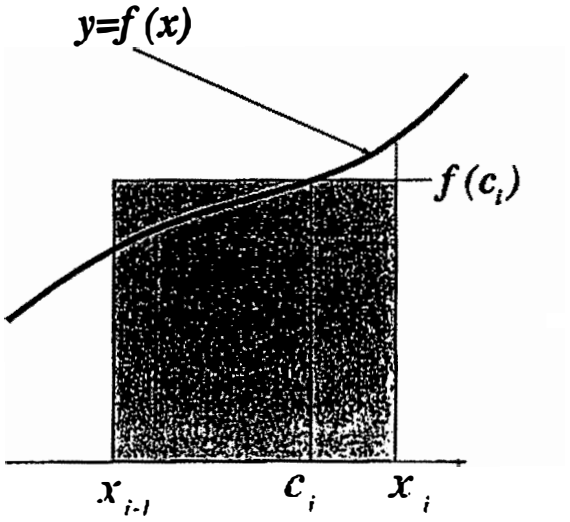


図3.5.7　$f(c_i)(x_i-x_i-1)$

これに対して，Lebesgue積分は被積分関数の値の方を分割した積和の極限

$$\int^b f(x)\ dx$$

$$=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1} c_i\cdot\mu(\{x \mid y_{i-1}<f(x)\leqq y_i\})$$

(Δは$[-M,M]$の分割$-M=y_0<y_1<\cdots<y_n=M$，$-M<f(x)<M\quad\forall x\in[a,b]$，$|\Delta| \triangleq \max_{i=1,n}(y_i-y_{i-1})$，$c_i\in[y_{i-1},y_i]$)となっているのでうまくいく(図3.5.8)．被積分関数のグラフを横に切った切り口の長さが測れれば(可測関数の定義!)，積分できるのである．

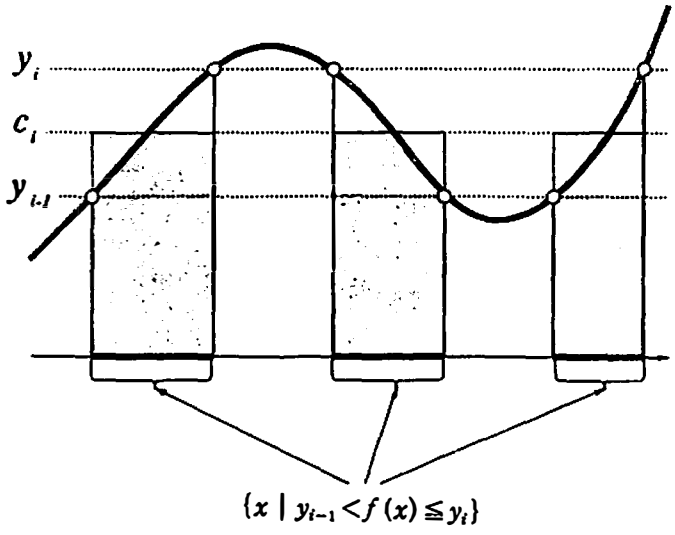


図 3.5.8 $c_i \cdot \mu(\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leqq y_i\})$

なお，広義 Riemann 積分(被積分関数または積分区間が有界でない場合の Riemann 積分)では話が変り，広義 Riemann 積分は定義可能だが，Lebesgue 積分不可能な関数が存在する．ただし，ともに積分可能なら積分値は一致する．

上の注に書いたように，実数軸(R,L,μ)では，Lebesgue 積分と Riemann 積分はほとんど同じものである．実数軸以外の場合でも，Lebesgue 積分は特殊なことをやっているわけではない．積分は積分である．基本は定義 3.5.3 の①，要は「掛けて加える」なのである．

3.6 積分の具体例

[例 3.6.1] 区分的に均質な密度をもつ針金を考える．すなわち，針金は A_1, A_2, …, A_nという部分に区切られ，各部分 A_iは均質な線密度 d_i g/cm をもつとする(図 3.6.1 参照)．

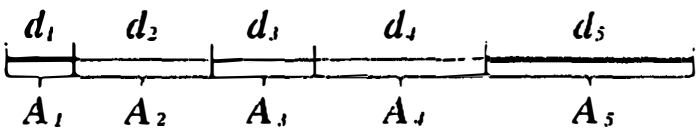


図 3.6.1 区分的に均質な針金

この針金の全質量 w g は次式で表される：

$$w = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \mu(A_i).$$

μ は各部分の長さをcmで与える測度である．

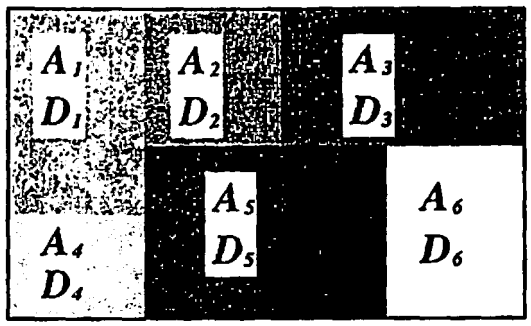
次にこれをもっと一般的に述べる．位置 x における線密度が $f(x)$ g/cmであるような針金を考える．上と全く同じ状況なら，$f(x) = d_i$ for $x \in A_i$ である．一般的には，$f(x)$ は x を含む均質な部分が無限に小さくなったときの密度の極限と考えればよい．この場合の全質量 w g も，積分で表される：

$$w = \int f \, d\mu.$$

部分領域 E の質量 w_E g は次式で与えられる：

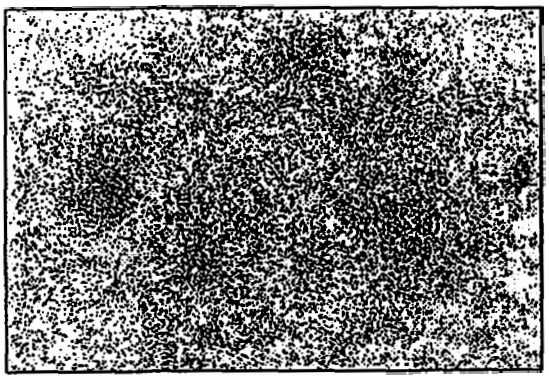
$$w_E = \int_E f \, d\mu.$$

この例は，次元が増えても同様に考えることができる．2 次元の場合は，針金が金属板に，線密度 $f(x)$ が面密度(g/cm²)に，測度 μ が長さ(cm)を与えるものから面積(cm²)を与えるものになる．積分値は質量(g)である．区分的に均質な金属板と不均質な金属板のイメージをそれぞれ図 3.6.2，図 3.6.3 に示す．



$$w = \int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{6} d_i \mu(A_i)$$

図 3.6.2 区分的に均質な金属板



$$w=\int f\,d\mu$$

図3.6.3 不均質な金属版

3次元の場合には，対象は金属塊，被積分関数 f は体積密度(g/cm³)，測度 μ は体積(cm³)になる．積分値は次元に関係なく質量(g)である．

3.7 積分の数学的性質

積分は測度によって定義されるので，測度の拡張になっており，測度の性質を継承しており，加法性，連続性，単調性をもつ．

・測度の拡張：

$$\int 1_A d\mu=\mu(A).$$

・加法性：「$\int f\,d\mu=\pm\infty$ かつ $\int g\,d\mu=\mp\infty$ (複号同順)」でないなら，

$$\int(f+g)\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu.$$

・連続性(単調収束定理)：$f_n\geqq 0\ \forall n,\ f_n\uparrow f$

$$\Rightarrow \int f_n d\mu\cdot\uparrow\ \int f\,d\mu.$$

・単調性：$f(x)\leqq g(x)\ \forall x\in X$

$$\Rightarrow\ \int f\,d\mu\leqq\int g\,d\mu.$$

積分の定義から，斉次性をもつ．

$$\cdot\int a\cdot f\,d\mu=a\cdot\int f\,d\mu\quad\forall a\in R$$

単調収束定理以外にも収束定理がある．

・Lebesgue の収束定理：

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f,\quad |f_n|\leqq g\quad\forall n,\ \int g\,d\mu<\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n d\mu\ =\int f\,d\mu.$$

・有界収束定理

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f,\quad |f_n|\leqq M\quad\forall n,\ \mu(X)<\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n d\mu\ =\int f\,d\mu.$$

3.8 有限集合上の測度と積分

最後に，全体集合 X を有限集合とし，可測空間 $(X,2^X)$ での測度と積分を考えてみよう．

$(X,2^X)$ 上の測度 μ は，その加法性より，

$$\mu(A)=\sum_{x\in A}\mu(\{x\})\quad\forall A\subset X$$

と書ける．すなわち，各点 x の測度の値 $\mu(\{x\})$ によって，すべての部分集合 A の測度の値 $\mu(A)$ が決まる．言い換えると，$(X,2^X)$ 上の測度 μ は，X 上の関数 $w:X\to[0,\infty]$ と一対一の関係にある．対応関係は

$$\mu(\{x\})=w(x)\quad\forall x\in X$$

である．また，積分も

$$\int f\,d\mu=\sum_{x\in X} f(x)\mu(\{x\})$$

$$=\sum_{x\in X} w(x)\cdot f(x)$$

と，$f(x)$ の荷重和として書き表せる．

したがって X が有限集合の場合，測度は 2^X 上の集合関数 μ として表現する必要はなく，X 上の関数 w として表現すれば十分である．結局，測度の集合関数としての数学的意義は，X が無限集合の場合にあると言える．(これに対して，ファジィ測度は加法性がないので，X が有限集合の場合にも意味のある概念である．詳しくは次回に述べる．)

今回は，ファジィでない，通常の測度と積分について概説した．数学的に厳密な議論はしなかったので，詳細は測度論の教科書を参考にしていただきたい．測度論の教科書は非常に多い．例えば，

次のようなものがある.

[a] P.R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, 1950 (Springer, 1974).
[b] 梅垣, 大矢, 塚田, 測度・積分・確率, 共立出版, 1987.
[c] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 裳華房, 1963.
[d] 鶴見茂, 測度と積分, 培風館, 1965.

[a]は世界的に有名な教科書である. しかし, [a]も含めて多くの教科書は, 初学者が読むと枝葉が多すぎて幹が見えなくなるおそれがある. その点, [b]はほとんど幹だけの本であり, 基礎を一通り学びたい方には適していると思う.

測度, 積分の意味に関しては, 次の文献が参考になると思う. 例3.6.1(針金)とRiemann積分とLebesgue積分の比較の部分は[f]を参考にさせていただいた.

[e]小島 順, 現実の中で積分を, 数学セミナー 1986年, 11月号, 70-79.
[f] 森 毅, 積分のすべて, in: 森 毅, 数学プレイ・マップ, 日本評論社(1983) 35-67, (初出, 数学セミナー 1970年 11月号).
[g]森 毅, 測度とはなにか, in: 森 毅, 数学プレイ・マップ, 日本評論社(1983) 69-99, (初出, 数学セミナー 1966年 11月号).
[h] 銀林 浩, 量の世界：構造主義的分析, むぎ書房, 1975.

次回は今回のべた測度論に沿って, ファジィ測度とその積分であるChoquet積分を解説する.

[問い合わせ先]
〒227 横浜市緑区長津田町4259
東京工業大学 大学院 総合理工学研究科
システム科学専攻
室伏 俊明
TEL：045-922-1111(内線)2641,2645
FAX：045-921-1485(専攻事務室)
e-mail murofusi@sys.titech.ac.jp