日本ファジィ学会誌 Vol.4, No.1, pp.81-89 (1992)

連 載

ファジィ測度論入門〔VI〕†

室伏 俊明* 菅野 道夫*

5．ファジィ測度とChoquet積分の表現

今回も前回と同様に，比例尺度としてのファジィ測度とChoquet積分を扱う．内容は，ファジィ測度μを通常の加法的な測度mを使って表すことと，μに関するChoquet積分をmに関するLebesgue積分で表すことである．今回の内容に関する詳細は，文献［1,2］を参考にされたい．

5.1．ファジィ測度の表現

数学的定義

まず，表現に必要な道具を定義する．

［定義5.1.1］ $(X,\boldsymbol{A})$と$(\Theta,\boldsymbol{S})$を可測空間とするとき，次の3条件を満足する写像$H:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{S}$を(部分集合に関する)**表現写像**と呼ぶ．

(H 1) $H(\emptyset)=\emptyset$

(H 2) $H(X)=\Theta$

(H 3) $A\subset B \Rightarrow H(A)\subset H(B)$

また，3つ組$(\Theta,\boldsymbol{S},H)$を$(X,\boldsymbol{A})$の枠と呼ぶ．

次の命題は明らかである．

［命題5.1.2］ $(X,\boldsymbol{A})$を可測空間，$(\Theta,\boldsymbol{S},m)$を測度空間，$H:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{S}$を表現写像とするとき，

$$\mu(A)\triangleq m(H(A)) \quad \forall A\in\boldsymbol{A} \tag{1}$$

で定まる$\mu:\boldsymbol{A}\to[0,\infty]$は，ファジィ測度である．

上の命題に基づき，ファジィ測度の表現を次のように定義する．

［定義5.1.3］ $(X,\boldsymbol{A},\mu)$をファジィ測度空間とするとき，4つ組$(\Theta,\boldsymbol{S},m,H)$が$(X,\boldsymbol{A},\mu)$(もしくは単に$\mu$)の**表現**であるとは，$(\Theta,\boldsymbol{S},m)$が測度空間，$H:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{S}$が表現写像であり，

$$\mu(A)=m(H(A)) \quad \forall A\in\boldsymbol{A}$$

となっていることをいう(図5.1)．

ファジィ測度の表現という概念は，Höhle［3］によって導入された．上の定義は，彼の定義の一般化になっている．

表現の具体例

では，前回の作業員と古本の例を使って，表現の説明をしよう．

［例5.1.4］(作業員)［1］．ある1種類の製品だけを作っている作業所があり，そこで働いている作業員全員の集合をXとする．作業員の任意のグル

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "H"'] & & {[0,\infty]} \\ & \boldsymbol{S} \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

図5.1 ファジィ測度の表現

† An Introduction to Fuzzy Measure Theory (VI)
Toshiaki MUROFUSHI and Michio SUGENO

* 東京工業大学大学院 総合理工学研究科 システム科学専攻
Dept. of Systems Science, Tokyo Institute of Technology

ープ $A(\subset X)$ について，A のメンバーが最も効率のよいやり方で働いたとき，A が単位時間(1時間)に作る製品の個数を $\mu(A)$ とする．この μ は $\boldsymbol{A}=2^X$ 上のファジィ測度であった．以下では簡単のため，$X=\{x_1,x_2\}$ とする．

μ が一般に加法的でないのは，前回説明したように，作業員 x_1 と x_2 の間に「効果的な協力」と「作業のかち合い」があるためである．このことから，生産効率を表す μ は次のように分解できる．

$$\left.\begin{aligned} \mu(\{x_1\})&=m_0+m_1\\ \mu(\{x_2\})&=m_0+m_2\\ \mu(\{x_1,x_2\})&=m_0+m_1+m_2+m_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ただし，$m_i \geqq 0$ であり，m_0は x_1 と x_2の間の作業のかち合いに対応する生産効率，m_1は x_1の生産効率からかち合いの生産効率を除いたもの，m_2も m_1 と同様に x_2の生産効率からかち合いの生産効率を除いたもの，m_3は x_1 と x_2の間の効果的な協力に対応する生産効率である．

上のことをファジィ測度の表現として数学的に表してみよう．$\Theta=\{\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，$\boldsymbol{S}=2^{\Theta}$，

$$m(E)=\sum_{\theta_i\in E} m_i \qquad \forall E\in \boldsymbol{S},$$

$H:\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{S}$ を

$H(\emptyset)=\emptyset$,

$H(\{x_1\})=\{\theta_0,\theta_1\}$,

$H(\{x_2\})=\{\theta_0,\theta_2\}$,

$H(X)=\Theta$

と定めると，$(\Theta,\boldsymbol{S},m,H)$ は μ の表現となっている(図5.2参照)．

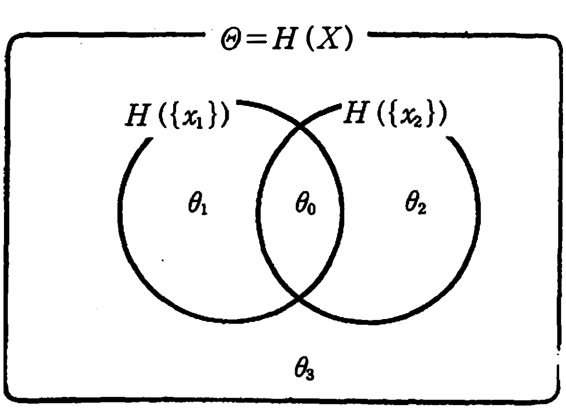

図5.2 例5.1.4のΘとH

[例5.1.5] (古本) [1]．上下2巻からなる古本がある．上巻を y_1，下巻を y_2で表し，$Y=\{y_1,y_2\}$とする．ある古本屋がこの本を

上巻1冊につき $\nu(\{y_1\})$円，

下巻1冊につき $\nu(\{y_2\})$円，

上下1組につき $\nu(Y)$円

で買い取る．上下巻揃いの方が価値が高いので，

$$\nu(Y)>\nu(\{y_1\})+\nu(\{y_2\})$$

である．$\nu(\emptyset)=0$ とおくと，ν は $\boldsymbol{B}=2^Y$上のファジィ測度になる．

さて今度は，

$$\begin{aligned}\nu(\{y_1\})&=m_1\\ \nu(\{y_2\})&=m_2\\ \nu(\{y_1,y_2\})&=m_1+m_2+m_2\end{aligned}$$

と表すのが自然だろう．m_1は上巻1冊の価値，m_2は下巻1冊の価値，m_3は上下が揃っていることの価値と解釈できる．

ここで，$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，$\boldsymbol{S}=2^{\Theta}$，

$$m(E)=\sum_{\theta_i\in E} m_i \quad \forall E\in\boldsymbol{S},$$

$H:\boldsymbol{B}\rightarrow\boldsymbol{S}$ を

$H(\emptyset)=\emptyset$,

$H(\{y_1\})=\{\theta_1\}$,

$H(\{y_2\})=\{\theta_2\}$,

$H(Y)=\Theta$

と定めれば，$(\Theta,\boldsymbol{S},m,H)$ は ν の表現となる(図5.3参照)．

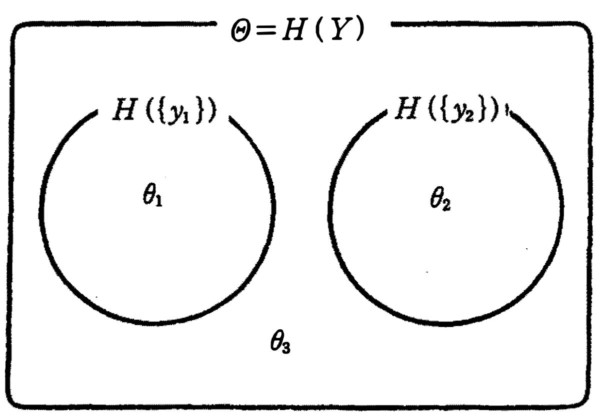

図5.3 例5.1.5のΘとH

表現の解釈

ファジィ測度の表現は，一般に次のように解釈することができるだろう．(Θ, S, m, H)をファジィ測度空間$(X, \mathbf{A}, \mu)$の表現とする．このときΘは，μの測っている属性に関して集合Xのもつ因子の集合とみなせる．因子は，特徴あるいは様相(modality でなく aspect)と呼んでもよい．作業員の例では，θ_0はx_1とx_2のかち合いの因子，θ_1はx_2とはかち合わないx_1独自の因子，θ_2はx_1とはかち合わないx_2独自の因子，θ_3はx_1とx_2の協力の因子である．

Hは，$A \in \mathbf{A}$にAがもつ因子全体$H(A)$を対応させる写像である．定義5.1.1の条件(H 1-3)を，因子に関して言い換えるとそれぞれ次の様になる．

(F 1) 空集合は因子をもたない．

(F 2) 全体集合Xはすべての因子をもつ．

(F 3) $A \subset B$ならば，BはAのもつ因子をすべてもつ．

これらの因子の強さを測っているのがmである．因子間には相互作用はないので——そのためにX内での複雑な相互作用を因子に分解してΘを構成した——，mは加法的な測度である．そして，$A \subset X$の測度$\mu(A)$は，Aのもつ因子全体$H(A)$の測度$m(H(A))$として与えられる．

Xは見かけの世界，Θは実質の世界(測っている属性の世界)ともいえる．もし実質が見かけ通りなら，すなわち

$$H(A \cup B) = H(A) \cup H(B) \quad \forall A, B \in \mathbf{A},$$
$$H(A \cap B) = H(A) \cap H(B) \quad \forall A, B \in \mathbf{A},$$

厳密には，

$$H(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(A_n) \quad \forall \{A_n\} \subset \mathbf{A},$$
$$H(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(A_n) \quad \forall \{A_n\} \subset \mathbf{A},$$

ならば，$\mu = m \circ H$は加法的な測度になる．しかし，一般に見かけと実質は違う．AとBが見かけ上 共通部分をもたなくても，測っている属性において共通部分をもつこともある．すなわち，$A \cap B = \emptyset$でも$H(A) \cap H(B) \neq \emptyset$のこともある．また，$A$と$B$が合わさることで，新たな様相が生れることもある．すなわち，$H(A) \cup H(B) \subsetneq H(A \cup B)$のこともある．これらのことのために，属性の世界の加法的なmが，見かけの世界での非加法的なμとなって表れるのである．

表現の存在

［命題 5.1.6］ 任意のファジィ測度は，表現をもつ．

証明． $(X, \mathbf{A}, \mu)$をファジィ測度空間とするとき，Θを実数開区間$(0, \mu(X))$，SをΘの Borel 部分集合全体，mを(Θ, S)上の Lebesgue 測度とし，$H: \mathbf{A} \to S$を

$$H(A) \triangleq (0, \mu(A)) \quad \forall A \in \mathbf{A}$$

と定めれば，(Θ, S, m, H)はμの表現である．□

表現は無数に存在する

ファジィ測度の表現は一意には定まらない．一般に，表現は無数にある．例5.1.4のμの場合，式(2)はm_0, m_1, m_2, m_3を未知数とする方程式とみることができ，これは$m_i \geqq 0 \ \forall i$という条件のもとで一般に無数の解をもつ．したがって，μの表現を与える測度mも無数にある．

また，因子を水増しして，例えば次のような表現を構成することもできる．

［例 5.1.7］ $\Theta' = \{\theta_0^1, \theta_0^2, \theta_1^1, \theta_1^2, \theta_1^3, \theta_2^1, \theta_2^2, \theta_3^1, \theta_3^2, \theta_3^3, \theta_3^4\}$，$S' = 2^{\Theta}$，$H': \mathbf{A} \to S'$が

$$H'(\emptyset) = \emptyset,$$
$$H'(\{x_1\}) = \{\theta_0^1, \theta_0^2, \theta_1^1, \theta_1^2, \theta_1^3\},$$
$$H'(\{x_2\}) = \{\theta_0^1, \theta_0^2, \theta_2^1, \theta_2^2\},$$
$$H'(X) = \Theta',$$

で与えられ，m'が

$$m'(\{\theta_0^1, \theta_0^2, \theta_1^1, \theta_1^2, \theta_1^3\}) = m_0 + m_1,$$
$$m'(\{\theta_0^1, \theta_0^2, \theta_2^1, \theta_2^2\}) = m_0 + m_2,$$
$$m'(\Theta') = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$$

を満たす(Θ', S')上の測度とすると，(Θ', S', m', H')は5.1.4のμの表現になる(図5.4)．

このように因子を水増しすればいくらでも異なる表現が構成できる．しかし，図5.2と5.4の Venn 図の形が同じであることからもわかるよう

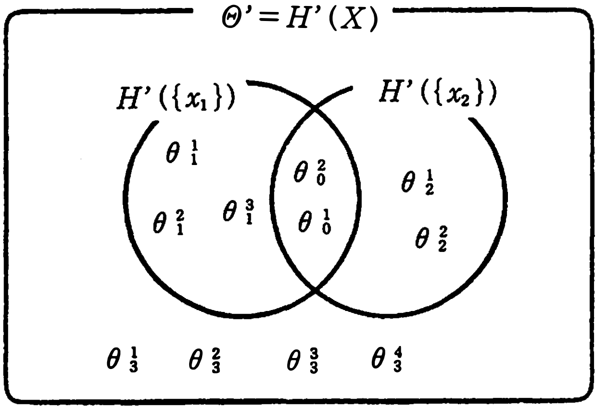

図 5.4 水増しされたΘ'と H'

に，上のように水増ししたΘ'による表現は，水増しする前の表現と本質的には変らない．この「本質的に変らない」ということを数学的に表したものが，次項で述べる「同型性」である．

表現の同型性

次の定義に出てくる概念「測度代数」と「…によって生成される σ-集合体」に関しては付録を参照されたい．

[定義 5.1.8] $Rep_1 = (\Theta_1, S_1, m_1, H_1)$ と $Rep_2 = (\Theta_2, S_2, m_2, H_2)$ をファジィ測度空間 $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ の表現とする．表現 $(\Theta_i, S_i, m_i, H_i)$ に対して $\{H_i(A) \mid A \in \boldsymbol{A}\}$ によって生成される S_i の σ-部分集合体を $\boldsymbol{H}_i$ と書き（付録の記号で表せば $\boldsymbol{H}_i = \sigma(\{H_i(A) \mid A \in \boldsymbol{A}\})$），$m_i$ の $\boldsymbol{H}_i$ への制限 $m_i \mid \boldsymbol{H}_i$ を再び m_i と書くことにし，測度空間 $(\Theta_i, \boldsymbol{H}_i, m_i)$ に対応する測度代数を $(\boldsymbol{H}_i(m_i), m_i)$ で表すことにする．測度代数 $(\boldsymbol{H}_1(m_1), m_1)$ から $(\boldsymbol{H}_2(m_2), m_2)$ への同型写像 T が存在し，$T \circ H_1 = H_2$ となるとき，Rep_1 と Rep_2 は**同型**であるという．またこのとき，T を Rep_1 と Rep_2 の間の**同型写像**と呼ぶ．

要するに，Rep_1 と Rep_2 が同型であるとは図 5.5 が可換になることである．

例 5.1.4 の表現 (Θ, S, m, H) と例 5.1.7 の水増しした表現 (Θ', S', m', H') は，

$$m(\{\theta_0\}) = m'(\{\theta_0^1, \theta_0^2\})$$
$$m(\{\theta_1\}) = m'(\{\theta_1^1, \theta_1^2, \theta_1^3\})$$
$$m(\{\theta_2\}) = m'(\{\theta_2^1, \theta_2^2\})$$
$$m(\{\theta_3\}) = m'(\{\theta_3^1, \theta_3^2, \theta_3^3, \theta_3^4\})$$

のとき，同型である．

表現の定義からわかるように，μ の表現には $H(A)$ の形の部分集合の測度だけが必要であり，他の部分集合の測度は必要でない．例えば，5.1.7 では集合 $\{\theta_0^1, \theta_0^2\}$ の測度は μ の表現には使われない．したがって，μ の表現には，測度空間 (Θ, S, m) は必ずしも必要ではなく，H によって生成される $(\Theta, \boldsymbol{H}, m)$ で十分なのである．

別の言い方をすると，我々は属性の世界Θを直接に観察・認識するのではなく，見かけの世界 X から H を通して間接的に観察・認識する．従って，任意の $A \in \boldsymbol{A}$ について $\theta \in H(A) \Leftrightarrow \theta' \in H(A)$，すなわち，つねに全く同じ集合に現れる因子 θ と θ' は区別できない，もしくは区別しなくてよい．例えば，5.1.7 の θ_3^1 と θ_3^3 は区別されない．

また，H-可測でも，測度が零の部分集合（これを零集合という）は存在しないのと同じであり，無視

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{H}_1(m_1) \arrow[rr, "T"] & & \boldsymbol{H}_2(m_2) \arrow[dd, "m_2"] \\
& \boldsymbol{A} \arrow[ul, "H_1"'] \arrow[ur, "H_2"] \arrow[d, "\mu"] & \\
& {[0,\infty]} \arrow[uul, "m_1"] &
\end{tikzcd}$$

図 5.5 表現の同型性

できる．よって，$A \neq B$ でも，$m(A \triangle B)=0$ ならば両者の違い $A \triangle B$ は無視できる，すなわち，A と B は同一視できる．そこで測度空間 $(\Theta, \boldsymbol{H}, m)$ から零集合を取り除いて同一視できるもの同士をまとめてエッセンスだけにしたもの一測度代数 $(\boldsymbol{H}(m), m)$ 一によって，同等性をみるのである．

ただ，ここで注意しておかねばならないのは，互いに同型な表現どうしを同一視しても，「一般にファジィ測度は無限に多くの表現をもつ」ということである．これは，前項で示したように，方程式(2)が不定であることから明らかであろう．

表現の普遍枠

この項で述べるのは次の事柄である．どんな可測空間 $(X,\boldsymbol{A})$ に対しても，ある枠 (Θ_X, S_X, H_X) が存在し，次の条件を満たす．「$(X,\boldsymbol{A})$ 上の任意のファジィ測度 μ と μ の任意の表現 $Rep=(\Theta, S, m, H)$ に対して，(Θ_X, S_X) 上の測度 m_{Rep} が存在し，$(\Theta_X, S_X, m_{Rep}, H_X)$ が Rep と同型な表現になる」．

このことと命題 5.1.6 から，「$(X,\boldsymbol{A})$ 上の任意のファジィ測度 μ に対して，(Θ_X, S_X) 上の測度 m が存在し，(Θ_X, S_X, m, H_X) が μ の表現になる」こともいえる．

まず，枠 (Θ_X, S_X, H_X) を定義しよう．

［定義 5.1.9］ $(X,\boldsymbol{A})$ を可測空間とする．$(X,\boldsymbol{A})$ の**セミフィルター**とは，次の 3 条件を満たす $\boldsymbol{A}$ の部分族 θ のことである．

(SF 1) $\emptyset \notin \theta$,

(SF 2) $X \in \theta$,

(SF 3) $A \in \theta \ \&\ A \subset B \in \boldsymbol{A} \Rightarrow B \in \theta$

例えば，$\{A \in \boldsymbol{A} \mid A \neq \emptyset\}$ や $\{X\}$ は，$(X,\boldsymbol{A})$ のセミフィルターである．

［定義 5.1.10］ $(X,\boldsymbol{A})$ を可測空間とする．$(X,\boldsymbol{A})$ のセミフィルター全体の集合を Θ_X，写像 $H_X : \boldsymbol{A} \to 2^{\Theta_X}$ を

$$H_X(A) \triangleq \{\theta \in \Theta_X \mid A \in \theta\} \quad \forall A \in \boldsymbol{A} \tag{3}$$

と定め，S_X を $\{H_X(A) \mid A \in \boldsymbol{A}\}$ から生成される σ-集合体とする．このとき 3 つ組 (Θ_X, S_X, H_X) を $(X,\boldsymbol{A})$ の**普遍枠**と呼ぶ．なお，明らかに H_X は $\boldsymbol{A}$ から S_X への表現写像である．

例えば，$X=\{x_1, x_2\}$，$\boldsymbol{A}=2^X$ のとき，$(X,\boldsymbol{A})$ の普遍枠は次のようにして得られる．

$$\Theta_X = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$$

ただし，

$$\theta_0 = \{\{x_1\}, \{x_2\}, X\},$$
$$\theta_1 = \{\{x_1\}, X\},$$
$$\theta_2 = \{\{x_2\}, X\},$$
$$\theta_3 = \{X\}.$$

また，

$$H_X(\emptyset) = \emptyset,$$
$$H_X(\{x_1\}) = \{\theta_0, \theta_1\},$$
$$H_X(\{x_2\}) = \{\theta_0, \theta_2\},$$
$$H_X(X) = \Theta_X.$$

であり，$S_X = 2^{\Theta_X}$ である．なお，この普遍枠は例 5.1.4 の枠と同じである．

［命題 5.1.11］ $(X,\boldsymbol{A},\mu)$ を任意のファジィ測度空間とする．μ の任意の表現 $Rep=(\Theta, S, m, H)$ に対して，(Θ_X, S_X) 上の測度 m_{Rep} が存在して，$(\Theta_X, S_X, m_{Rep}, H_X)$ は Rep と同型な表現になる．

証明（詳細は文献［2］を参照されたい）．

$Rep=(\Theta, S, m, H)$ を μ の表現とする．各 $\theta \in \Theta$ に対して，

$$\tau(\theta) \triangleq \{A \in \boldsymbol{A} \mid \theta \in H(A)\} \tag{4}$$

と定めると，$\tau(\theta)$ はセミフィルターになる．まず，これを示そう．$H(\emptyset)=\emptyset$ なので，

$$\emptyset \notin \tau(\theta).$$

$H(X)=\Theta$ なので，

$$X \in \tau(\theta).$$

$A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B)$ なので，

$$A \in \tau(\theta) \ \&\ A \subset B \Rightarrow B \in \tau(\theta).$$

したがって定義5.1.9より，$\tau(\theta)$はセミフィルターである．

以上から，τはΘからΘ_Xへの写像と見なせる．そして，$\tau^{-1}\circ H_X=H$となっている．ここで，τ^{-1}は

$$\tau^{-1}(E)\triangleq\{\theta\in\Theta\mid\tau(\theta)\in E\}\quad\forall E\in \boldsymbol{S}_X$$

で定まる写像$\tau^{-1}:\boldsymbol{S}_X\rightarrow\boldsymbol{S}$である．そこで，

$$m_{Rep}(E)\triangleq m(\tau^{-1}(E))\quad\forall E\in \boldsymbol{S}_X$$

とおけば，m_{Rep}は$(\Theta_X,\boldsymbol{S}_X)$上の測度であり，

$$\begin{aligned} m_{Rep}(H_X(A)) &= m(\tau^{-1}(H_X(A)))\\ &= m(H(A))\\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

なので，$(\Theta_X,\boldsymbol{S}_X,m_{Rep},H_X)$は$\mu$の表現になっている．また，同型写像$T:(\boldsymbol{S}_X(m_{Rep}),m_{Rep})\rightarrow(\boldsymbol{S}(m),m)$は，$T\triangleq\tau^{-1}$で与えられる．□

上の命題と命題5.1.6より，次の系が導かれる．

［系5.1.12］ 可測空間$(X,\boldsymbol{A})$上の任意のファジィ測度μに対して，$(\Theta_X,\boldsymbol{S}_X)$上の測度$m$が存在して，$(\Theta_X,\boldsymbol{S}_X,m,H_X)$が$\mu$の表現となる．

普遍枠の解釈

表現の解釈のところで使った属性の因子(あるいは特徴または様相)という概念を用いて普遍枠を解釈してみよう．$(\Theta,\boldsymbol{S},m,H)$を$\mu$の表現とする．

まず$\tau(\theta)=\tau(\theta')$のとき，$\theta$と$\theta'$は同一視できる，すなわち，これらは区別する必要がない．このことは，「$\tau(\theta)=\tau(\theta')$」が，「$\forall A\in\boldsymbol{A}\ \theta\in H(A)\Leftrightarrow\theta'\in H(A)$」と同値であることに注意すれば，表現の同型性のところでの説明から明らかであろう．そしてこのことから，各因子θは，θを因子としてもつ部分集合全体からなるセミフィルター$\tau(\theta)=\{A\in\boldsymbol{A}\mid\theta\in H(A)\}$と同一視できる．以上から，因子はあるセミフィルターと同一視できることがわかる．

因子に仮定した条件(F 1-3)とセミフィルターの条件(FS 1-3)の対応に注意すれば，逆に，$(X,\boldsymbol{A})$の任意のセミフィルターθに対して，このセミフィルターθに属する部分集合Aだけが共通してもつ因子の存在を想定し得る．つまり，任意のセミフィルターはある因子と同一視できる．

以上から，ファジィ測度の表現に用いる因子としては$(X,\boldsymbol{A})$のセミフィルターが必要かつ十分なこと，すなわち表現に使う集合としてはΘ_Xが必要かつ十分なことがわかる．また，このとき表現写像を(3)式のように定めればよいのは，セミフィルターθと，θに属する部分集合だけが共通にもつ因子とを同一視することから明らかだろう．

DS理論の場合

この節の最後に，Dempster-Shafer理論におけるbel関数Belとpl関数Plの表現について述べよう．まず，基本確率割当mが，bel関数とpl関数の表現を構成することを示す．

Ωを有限集合，BelをΩ上のbel関数，mをBelの基本確率割当，Plをmによって生成されるpl関数とする．以前に指摘したようにBelとPlは$(\Omega,\boldsymbol{A})$(ただし，$\boldsymbol{A}=2^{\Omega}$)上のファジィ測度である．$\Theta\triangleq2^{\Omega}$，$\boldsymbol{S}\triangleq2^{\Theta}$とおき，$(\Theta,\boldsymbol{S})$上の測度$M$を

$$M(E)\triangleq\sum_{A\in E}m(A)\quad\forall E\in\boldsymbol{S}$$

と定める．$H_{Bel}:\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{S}$を

$$H_{Bel}(A)\triangleq\{B\in\boldsymbol{A}\mid B\subset A\}\quad\forall A\in\boldsymbol{A},$$

$H_{Pl}:\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{S}$を

$$H_{Pl}(A)\triangleq\{B\in\boldsymbol{A}\mid B\cap A\neq\emptyset\}\quad\forall A\in\boldsymbol{A}$$

と定めれば，これらはともに表現写像となり，$(\Theta,\boldsymbol{S},M,H_{Bel})$と$(\Theta,\boldsymbol{S},M,H_{Pl})$はそれぞれ$Bel$と$Pl$の表現になる．実際，

$$\begin{aligned} M(H_{Bel}(A)) &= M(\{B\in\boldsymbol{A}\mid B\subset A\})\\ &= \sum_{B\subset A}m(B)\\ &= Bel(A),\\ M(H_{Pl}(A)) &= M(\{B\in\boldsymbol{A}\mid B\cap A\neq\emptyset\})\\ &= \sum_{B\cap A\neq\emptyset}m(B)\\ &= Pl(A).\end{aligned}$$

M と m は一対一に対応しているので同一視できる．従って，基本確率割当 m は bel 関数 Bel と pl 関数 Pl の表現と言ってもよいだろう．

さて，すぐわかるように，bel 関数の表現写像 H_{Bel}は∩-準同型写像

$$H_{Bel}(A\cap B)=H_{Bel}(A)\cap H_{Bel}(B)$$

であり，pl 関数の表現写像 H_{Pl}は∪-準同型写像

$$H_{Pl}(A\cup B) = H_{Pl}(A)\cup H_{Pl}(B)$$

である．この逆も言える．すなわち，$(X,2^X,\mu)$をファジィ測度空間，(Θ, S,m,H)をその表現，X は有限集合，$m(\Theta)=1$ とするとき，H が∩-準同型写像ならば μ は bel 関数であり，H が∪-準同型写像ならば μ は pl 関数である．

5.2．Choquet 積分の表現

(Θ, S,m,H)をファジィ測度空間$(X,\boldsymbol{A},\mu)$の表現とするとき，X 上の可測関数 f の μ に関する Choquet 積分は，Θ上のある可測関数 $\eta(f)$の m に関する Lebesgue 積分で表される．

$$(C)\int f\, d\mu=\int \eta(f)\, dm$$

本節では，このことについて議論する．

表現定理

可測空間$(X,\boldsymbol{A})$上の非負可測関数の全体からなる集合を $\boldsymbol{F}(X,\boldsymbol{A})$ と書くことにする．

［定義 5.2.1］ $(X,\boldsymbol{A})$と(Θ, S)を可測空間，H：$\boldsymbol{A}\to S$ を部分集合に関する表現写像とする．このとき，$f\in\boldsymbol{F}(X,\boldsymbol{A})$に対して次式

$$\eta(f)(\theta)\triangleq \sup\{r\mid \theta\in H(\{x\mid f(x)>r\})\} \qquad \forall\theta\in\Theta$$

で定まる $\eta(f)$を対応させる写像 η：$\boldsymbol{F}(X,\boldsymbol{A})\to\boldsymbol{F}(\Theta, S)$を，$H$ によって導かれる（関数に関する）**表現写像**と呼ぶ．

表現写像 $\eta(\mathrm{f})$は

$$\eta(\mathrm{f})(\theta)=\sup_{A:\,\theta\in H(A)}\inf_{x\in A} f(x) \qquad (5)$$

とも表される．$\eta(1_A)=1_{H(A)}$ なので，η は H の拡張と見なせる．一般に $f\in\boldsymbol{F}(X,\boldsymbol{A})$は

$$f=\sup_{r\in[0,\infty]} r\cdot 1_{\{x\mid f(x)>r\}}$$

と書き表せ，このとき

$$\eta(f)=\sup_{r\in[0,\infty]} r\cdot 1_{H(\{x\mid f(x)>r\})}$$

となっている．

［定理 5.2.2］ $(X,\boldsymbol{A},\mu)$をファジィ測度空間，(Θ, S,m,H)をその表現とする．このとき，任意の $\forall f\in\boldsymbol{F}(X,\boldsymbol{A})$について次式が成立する．

$$(C)\int f\, d\mu=\int \eta(f)\, dm.$$

表現の具体例

［例 5.2.3］（作業員，例 5.1.4 の続き）[1].

ある日，作業員 x_1と x_2が始業時間からそれぞれ $f(x_1)$時間，$f(x_2)$時間働いたとする．前回示したように，この日に生産された製品の総数は，f の μ による Choquet 積分$(C)\int f\, d\mu$ で表される．

このとき，各因子 $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$が何時間ぶん利いてくるかを考えよう．$\theta_1$ は x_1 独自の因子なので $f(x_1)$時間利いていると見ることができる．同様に θ_2は $f(x_2)$時間である．θ_0は x_1と x_2のどちらにも現れる因子なので，x_1と x_2のうちの少なくとも一方が働いていれば利いてくる．したがって，θ_0に対応する時間は $\max\{f(x_1), f(x_2)\}$である．θ_3は x_1と x_2の協力の因子なので，x_1と x_2が一緒に働いていないと利いてこない．従って，θ_3に対応する時間は $min\{f(x_1), f(x_2)\}$である．一方，η の定義から

$$\eta(f)(\theta_0)=\max\{f(x_1), f(x_2)\},$$
$$\eta(f)(\theta_1)=f(x_1),$$
$$\eta(f)(\theta_2)=f(x_2),$$
$$\eta(f)(\theta_3)=\min\{f(x_1), f(x_2)\},$$

である．よって，X 上の関数 f に対応して，各因子 θ が値 $\eta(f)(\theta)$だけ利いていることがわかる．

実は 5.2.1 の η の定義式やそのあとの式(5)も，上の説明と同じように因子 θ の利き方を示している．そこで少し脱線して，一般の場合を考えよう．f に対応して因子 θ が利いてくる値が r 以上であるためには，因子 θ をもつ集合 $A\in\boldsymbol{A}$ があって，f が A 上で r 以上の値をとることが必要かつ

十分であろう．このことを式に表すと

$$\int \eta(f)(\theta) > r$$
$$\Leftrightarrow \sup_{A:\theta\in H(A)} \inf_{x\in A} f(x) > r$$

となる．そして，これは式(5)と同値なのである．

作業員の例に戻り，$f(x_1) \leqq f(x_2)$として，この$\eta(f)$をmで積分してみよう．下の様にfのμに関するChoquet積分に等しいことがわかる．

$$\begin{aligned}
&\int \eta(f)\, dm \\
&= \eta(f)(\theta_0)\cdot m(\{\theta_0\}) \\
&\quad + \eta(f)(\theta_1)\cdot m(\{\theta_1\}) \\
&\quad + \eta(f)(\theta_2)\cdot m(\{\theta_2\}) \\
&\quad + \eta(f)(\theta_3)\cdot m(\{\theta_3\}) \\
&= f(x_2)\cdot m_0 + f(x_1)\cdot m_1 \\
&\quad + f(x_2)\cdot m_2 + f(x_1)\cdot m_3 \\
&= f(x_1)\cdot(m_0+m_1+m_2+m_3) \\
&\quad + [f(x_2)-f(x_1)]\cdot(m_0+m_2) \\
&= f(x_1)\cdot\mu(X) \\
&\quad + [f(x_2)-f(x_1)]\cdot\mu(\{x_2\}) \\
&= (C)\int f\, d\mu.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[rr, "\eta(f)"] \arrow[dr, "\tau"'] & & {[0,\infty]} \\
& \Theta_X \arrow[ur, "\eta_X(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

図 5.6　普遍枠の場合

普遍枠の場合

次の命題はτの定義式(4)と定義5.2.1のηの定義から明らかであろう．

［命題5．2．4］ (X,A)を可測空間，(Θ, S, H)をその任意の枠，(Θ_X, S_X, H_X)をその普遍枠，ηとη_XをそれぞれHとH_Xによって導かれる，関数に関する表現写像とする．X上の任意の非負可測関数fに対して，次式が成立する：

$$\eta(f)(\theta) = \eta_X(f)(\tau(\theta)) \quad \forall\theta\in\Theta$$

上定理は図5.6が可換であることをいっている．

引　用　文　献

[1] T. Murofushi and M. Sugeno, An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems 29 (1989) 201-227.

[2] T. Murofushi and M. Sugeno, A theory of fuzzy measures: the Choquet integral, representations, and null sets, J. Math. Anal. Appl. (1991) 532-549.

[3] U. Höhle, A mathematical theory of uncertainty, in: Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developments, R.R. Yager, Ed., Pergamon Press, New York (1982) 344-355.

付　録

測度代数について

以下に出てくるBoole束については，数学辞典等を参照されたい．

束Sの任意の空でない可算部分集合Tが上限と下限の両方をもつとき，Sはσ-完備であるという．可算集合$\{a_n\}\subset S$の上限および下限をそれぞれ

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n,\quad \bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n$$

で表す．

$(S, \vee, \wedge, {}^c, O, I)$が$\sigma$-完備なBoole束で，
$m: S \to [0,\infty]$ が，

$$m(a)=O \Leftrightarrow a=0,$$
$$a_i \wedge a_j=0 \text{ for } i \neq j \Rightarrow m\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} m(a_i)$$

を満たすとき，組(S, m)を**測度代数**という．

(S_1, m_1)と(S_2, m_2)を測度代数とする．
$T: S_1 \to S_2$が

$$T\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i\right)=\bigvee_{i=1}^{\infty} T(a_i) \quad \forall\{a_n\}\subset S_1,$$
$$T(a^c)=T(a)^c \quad \forall a\in S_1,$$
$$m_1(a)=m_2(T(a)) \quad \forall a\in S_1$$

を満たすとき，Tを(測度代数)**同型写像**という．

(Θ, S, m)を測度空間とする．$A, B\in S$に対して

$$A\sim B \Leftrightarrow m(A \triangle B)=0$$

と定義すれば，$\sim$はS上の同値関係になる．
$S(m) \triangleq S/\sim=\{[A]\ |A\in S\}$（ただし，$[A]$は$A$の同値類$\{B\in S|A\sim B\}$）とおき，

$$m([A]) \triangleq m(A) \quad \forall A\in S$$

とすれば，$(S(m), m)$は測度代数になる．これを(Θ, S, m)に対応する測度代数という．

…によって生成されるσ-集合体

$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$を$X$上の$\sigma$-集合体からなる族とするとき，$\cap\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}(=\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)$も$\sigma$-集合体となる．したがって，$C\subset 2^X$とするとき，

$$\sigma(C) \triangleq \cap\{A|A \text{ は } X \text{ 上の } \sigma\text{-集合体}, C\subset A\}$$

で定まる$\sigma(C)$はX上のσ-集合体である．そして，Cを含むσ-集合体の中で最小である．すなわち，AがX上のσ-集合体で$C\subset A$ならば，$\sigma(C)\subset A$となる．この$\sigma(C)$をCによって生成されるσ-集合体という．

例えば，$X=\{a,b,c,d\}$，$C=\{\{a\},\{a,b\}\}$とするとき，$\sigma(C)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c,d\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},X\}$である．

(1991年10月21日　受付)

［問い合わせ先］
〒227 横浜市緑区長津田町4259
東京工業大学 大学院 総合理工学研究科
システム科学専攻
室伏 俊明，菅野 道夫
TEL：045-922-1111(内)2645，2641
FAX：045-921-1485(専攻事務室)
email：murofusi@sys.titech.ac.jp
msugeno@sys.titech.ac.jp