連載

ファジィ測度論入門〔II〕†

菅野 道夫* 室伏 俊明*

2．Ambiguityを表すファジィ測度

本章ではambiguityを表すファジィ測度を扱う．

内容は以下の通りである．

2.1．Ambiguityの定式化
2.2．確率測度と主観確率
2.3．非加法的主観確率
2.4．エキスパートシステムと確率測度
2.5．Dempster-Shafer 理論
2.6．可能性理論(予定)
2.7．Ambiguity 定式化の補足(予定)

今回は2.5節までで，2.6，2.7節は次号で述べる．2.3，2.4節では，ambiguityの表現には確率測度だけでは不十分であること，確率法則に縛られないファジィ測度が必要であることを説明する．

2.1．Ambiguityの定式化

Ambiguityとは多くの可能性のうちどれであるか特定できないあいまいさである．前回その定式化を簡単に説明したが，ここではそれをもう少しくわしく見ていく．

ω_0をある一つの質問に対する正しい答とし，Ωを答の候補からなる集合とする．ここでの質問，ω_0，Ωとは，例えば次のようなものである．

(a)「この壺が作られたのは何年前か?」
　ω_0：壺が作られてから今までの年数，
　$\Omega=\{\omega|\omega$ は0以上の整数$\}$.
(b)「このさいころを投げたとき，出る目は何か?」
　ω_0：出る目，
　$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
(c)「ある殺人事件の容疑者，勝又，小林，百武のうち，真犯人は誰か?」
　ω_0：真犯人，
　$\Omega=\{$勝又，小林，百武$\}$.
(d)「ヤスカワ氏の奥さんは何歳か?」
　ω_0：奥さんの年齢，
　$\Omega=\{\omega|\omega$ は16以上120以下の整数$\}$.

定式化を進めるにあたり，ω_0とΩに関して次の仮定を置く：

A1：集合Ωの要素は互いに排反であり，複数の要素が同時に正解となることはない．

A2：Ωは質問の可能な答のすべてを含んでいる．すなわち，正解ω_0はΩの中にただ一つ必ずあるとする．このような2つの仮定を置くことをambiguityの標準設定と呼ぶことにする．

以下，標準設定のもとで議論を進める．標準設定以外の場合については2.7節で考察する．

さて，我々の知識または判断を，命題Aの確からしさの度合を実数$g(A)$で与えることによって表す．これについて次の3つの要請をおく．これら3つはambiguityの標準設定とは独立である．

① 命題Bが命題Aより確からしい，または同程度に確からしいならば，$g(A)\leqq g(B)$とする．

② 確実に“Aでない”なら$g(A)=0$とする．

---

† An Introduction to Fuzzy Measure Theory
Michio SUGENO and Toshiaki MUROFUSHI

* 東京工業大学大学院 総合理工学研究科 システム科学専攻
Dept. of Systems Science, Graduate School of Tokyo Institute of Technology

③ 確実に A なら $g(A)=1$ とする．

②と③の逆は仮定しない．$g(A)=0$ が必ずしも「確実に“A でない”」を意味せず，$g(A)=1$ が必ずしも「確実に A」を意味しないような場合も認める．もちろん，②，③の逆が成り立つような場合があってもよい．

ここでの我々の関心は ω_0 にあるので，“$\omega_0 \in E$”なる形の命題だけを対象にする．そこで簡単のため，命題“$\omega_0 \in E$”の確からしさを $g(\omega_0 \in E)$ でなく，$g(E)$ で表す．結局，Ω のさまざまな部分集合 E に対し，“$\omega_0 \in E$”なる確からしさ $g(E) \in [0,1]$ を与えるわけである．

さて，$E \in F$ のとき，“$\omega_0 \in E$”ならば“$\omega_0 \in F$”なので，①より

$$E \in F \Rightarrow g(E) \leqq g(F) \tag{1}$$

である．そして $\omega_0 \not\in \emptyset$ なので，②より

$$g(\emptyset)=0 \tag{2}$$

である．また ambiguity の標準設定から $\omega_0 \in \Omega$ なので，③より次式が要請される：

$$g(\Omega)=1 \tag{3}$$

数学的には確からしさの測度（ファジィ測度）の公理として(1)，(2)，(3)が採用される．

［定義2.1.1］ $\Omega \neq \emptyset$ とし，S を Ω の部分集合からなる Boole 代数とする．条件(1)，(2)，(3)を満たす $g: S \to [0,1]$ をファジィ測度という．

Boole 代数の定義は，以下の通りである．

［定義2.1.2］ $\Omega \neq \emptyset$ とする．$S \subset 2^{\Omega}$ が

B1：$\emptyset, \Omega \in S$

B2：$E \in S \Rightarrow E^c \in S$

B3：$E, F \in S \Rightarrow E \cup F \in S,\ E \cap F \in S$

を満たすとき，S を Boole 代数（Boolean algebra）または単に代数（algebra）という．なお，2^{Ω} は Ω のべき集合（Ω の部分集合全体）である．

ファジィ測度の定義域を Boole 代数にするのは，理論展開に便利だからであり，Boole 代数でなければならない必然性はない．

全くあいまいでない最も特殊なファジィ測度を紹介して本節を終える．ω_0 の値が既知であるとき，ω_0 に関するわれわれの知識または判断は Dirac 測度によって表される．Dirac 測度 δ の定義は前回述べたが，再び書くと，

$$\delta(E) \triangleq \begin{cases} 1 & \omega_0 \in E, \\ 0 & \omega_0 \notin E \end{cases} \tag{4}$$

である．ω_0 の値が既知であるときのファジィ測度がこのように定められるのは，上の要請②，③から明らかであろう．

2.2 確率測度と主観確率

この節では，公理的確率論における確率（測度）の定義，この定義と相対頻度との関係，そして最後に主観確率と質的確率について述べる．

確率論は，確率の解釈の違いによって，いくつかに分類される．研究者によって分類の仕方に違いがあるが，たとえば次の様に分類される（かっこ内は，それぞれの立場における確率の定義や意味である）：

(a) 組合せ論的確率，
　（ある事柄の起る場合の数の比），
(b) 頻度論的確率，
　（ある事柄の起った回数と試行回数との比），
(c) （帰納）論理確率，
　（ある仮説とそれに関する証拠の間の論理的関係），
(d) 主観確率，
　（ある個人のある事柄に対する主観的判断）．

ここでは，公理的確率論に関連して(b)の頻度論的確率を，ファジィ測度に関連して(d)の主観確率を取り上げる．

まず，Kolmogorov [42] によって初めて与えられた確率の公理から述べよう．現在，彼の公理的確率論が数学における確率論の主流となっている．

［定義2.2.1］ Ω の部分集合からなる代数 S が

A4：$\{E_n\} \subset S \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in S$ を満たすとき，σ-代数（σ-algebra）という．組 (Ω, S) を可測空間（measurable space）と呼ぶ．

$(\Omega, 2^{\Omega})$や$(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$は可測空間の例である.

[定義2.2.2] Pが可測空間(Ω, S)上の確率測度であるとは, Pが条件P1-P4を満たすS上の実数値関数$P: S \to [0,1]$であることをいう.

P1 : $P(\emptyset)=0$,

P2 : $P(\Omega)=1$,

P3 : $E \cap F=\emptyset \Rightarrow$

$$P(E \cup F)=P(E)+P(F),$$

P4 : $E_n \downarrow \emptyset \Rightarrow P(E_n) \downarrow 0$

ここで, $E_n \downarrow \emptyset$は集合列$\{E_n\}$が$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n=\emptyset$なる単調減少列であることを意味し, $P(E_n) \downarrow 0$は数列$\{P(E_n)\}$が$\lim_{n \to \infty} P(E_n)=0$なる単調減少列であることを意味する. なお, P1-P3のもとでP4と次の性質(σ-加法性)は同値である.

$$E_n \cap E_m=\emptyset \text{ for } n \neq m \Rightarrow$$
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \qquad (5)$$

Kolmogorov[42]も述べているように, 数学的理論はいったん公理化されてしまえば, どんな解釈をも許す. 確率論もそうである. 上の確率測度を, (a), (b), (c), (d)いずれの観点からも解釈することができる. ただし公理化に際して, Kolmogorovは(b)の頻度論を意識していたようである.

(b)の頻度論の立場では, 確率論はstochasticな現象(北川[43]. さいころ投げの繰り返しのように, 個々の結果は不規則的だが集団的には規則性をもつ現象)の科学と見なされる. この立場の最右翼における確率の定義は, 相対頻度の極限

$$P(E) \triangleq \lim_{N \to \infty}(R/N) \qquad (6)$$

である. ここでR/Nは, N回の試行中, 事象EがR回生起したときの相対頻度である. また, 極限の存在は仮定される.

Kolmogorovの見解はもっと穏健である. 彼は, 確率の公理群と経験的事実との関連に関する記述([42]第1章第2節)において, 事象Eに対して次の性質をもつ実数$P(E)$が定められているものと仮定することができるとしている.

A. 繰り返し数Nが非常に大きいとき, R/Nが$P(E)$にほとんど等しいことを実際に確かめることができる.

B. $P(E)$が非常に小さいとき, 一回だけの試行に対して, Eが起らないということを実際に確かめることができる.

なお, $P(E)=0$はEが起こり得ないことを意味しない. ただし性質Aより, Nが非常に大きいときR/Nは非常に小さい. また, 同様に$P(E)=1$はEが必ず生起することを意味しない.

Kolmogorovの公理化には, ambiguityの標準設定が存在している. すなわち, 集合Ωの要素は互いに排反(複数の要素が同時に生起することはない)であり, Ωは起こり得る可能な場合のすべてを尽くしていると仮定されている. この標準設定と確率が頻度であることから, 公理P2(全事象Ωの確率が1)とP3(確率の加法性)が従う.

なお, Kolmogorovの公理化に対する批判もある(たとえばFine [44]).

次に(d)の主観確率に関して述べる. 主観確率という考え方を集大成したのは, Savage [45] である. 彼は, ある個人がある命題(たとえば,「明日雨が降る」)の真理性に対してもつ確信の度合を確率としてとらえ, これを個人確率(personal probability), 主観確率(subjective probability)などと呼んだ.

この主観確率の理論的導入に際して, 質的確率(qualitative probability), または比較確率(comparative probability)とも呼ばれる, がよく用いられる. 人が主観的な起こりやすさを直接に数値で与えているとは考えにくい. 人によるもっとも素朴な確からしさの判断は, 事象EとFのどちらが確からしいかという比較判断であろう. この一対比較(質)による確からしさの判断が質的確率である(これに対し, 数値(量)で表された通常の確率は量的確率(quantitative probability)という). 数学的には, 質的確率は事象全体からなる代数S上のある性質を持つ2項関係$\lesssim$である. $E \lesssim F$は「FはEよりも確からしいか, 同程度に確からしい」ということを意味する.

$$E \precsim F \Leftrightarrow P(E) \leqq P(F) \quad \forall E, F \in S \quad (7)$$

のとき，確率測度 P と質的確率 $\precsim$ は両立する (compatible) という．この $\precsim$ がいくつかの条件（たとえば以下の Q0-Q6）を満足すると，$\precsim$ と両立する確率測度がただ１つ存在する．すなわち，人がそれらの条件を満たすような確からしさの判断をするならば，その人はある確率測度 P で確からしさを見積もっているのと同じなのである．この確率測度 P がその人の主観確率である．

ただ一つの両立する確率測度 P を与える条件は，いく組も提案されているが，ここでは Fine［44］から紹介する．$E \approx F \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} E \precsim F$ かつ $F \precsim E$, $E < F \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} E \precsim F$ かつ $E \not\approx F$ とする．

Q0 (Nontriviality)：$\emptyset < \Omega$.

Q1 (Comparability)：$E \precsim F$ or $F \precsim E$.

Q2 (Transitivity)：
$E \precsim F,\ F \precsim G \Rightarrow E \precsim G$.

Q3 (Improbability of impossibility)：
$\emptyset \precsim E$.

Q4 (Disjoint unions)：$E \cap (F \cup G) = \emptyset \Rightarrow$
$(F \precsim G \Leftrightarrow E \cup F \precsim E \cup G)$

Q5 (Monotone continuity)：
$F \precsim E_i \forall i,\ E_i \downarrow E \Rightarrow F \precsim E$.

Q6：$(E \cap F = \emptyset,\ G \precsim E,\ H \precsim F) \Rightarrow$
$(\exists G', H'I)(G' \cap H' = \emptyset,\ I \approx E \cup F,$
$G' \approx G,\ H' \approx H,\ I \supset G' \cup H')$.

［定理2.2.1］ $\precsim$ が Q0-Q6を満たすならば，$\precsim$ と両立する確率測度 P が唯一存在する．

逆に，確率測度と両立する２項関係 $\precsim$ は Q0-Q5を満足する．確率測度と両立しても Q6を満たさない $\precsim$ が存在するが，たとえば non-atomic な確率測度 P や，Ω が有限集合のときの $P(\{\omega\}) = 1/|\Omega|\ \forall \omega \in \Omega$ なる P と両立する $\precsim$ は Q6を満足する (non-atomic の数学的定義については数学辞典等を参照されたい)．Q6のような条件が置かれるのは，Q0-Q5は満足するが，どんな確率測度とも両立しない $\precsim$ が存在するためである．詳しくは Fine［44］などを参照されたい．

2.3 非加法的主観確率

この節では，主観的な確からしさは加法的である必然性はないことを説明する．

なぜ主観確率が加法的であるかを考えると，前節で示したように，人間の確からしさに関する判断である質的確率 $\precsim$ が Q0-Q6を満たすからだといえよう．条件 Q0-Q6は一見合理的だが，それは stochastic な現象を想定しての合理性（したがって加法的な頻度的確率と両立する），もしくは初めから公理 P1-P4を満たす主観確率を想定しての合理性という印象をうける．言い換えると，加法的な主観確率を用いるのは，公理的確率論における期待値，条件付確率などの道具を使えるという利便性のためと言えまいか．もちろん主観確率が P1-P4を満たす確率測度になることはあるだろう．しかし，人間の判断にとって確率法則を満たすことは，そんなにも「合理的」なのだろうか?

ここで，前回予告した Ellsberg［30］の壺の問題を取り上げよう．人はふつう，E, F という２つの事象のどちらか一方に賭けなければならないとき，より確からしいと思う方に賭ける．このことから逆に，賭に対する選好から主観的な確からしさを測ることができると考えられる．例えば，その事象が生起すれば1000円貰え；生起しなければ1000円払うような賭を考えよう．事象 E に対するこのような賭への好ましさが事象 F に対する同様の賭と同程度か，より大きいとき，$F \precsim E$，すなわち F よりも E の方が主観的に確からしいとする．

Ellsberg の壺の問題：「二つの壺がある．壺Ⅰには，赤玉と黒玉が合わせて100個はいっているが，その割合はわからない (100個とも同じ色の玉かも知れない)．壺Ⅱには，赤玉50個，黒玉50個，合計100個の玉が入っている．両方の壺から同時に一個ずつ玉を取り出す．

事象 R_{I}：壺Ⅰから赤玉が出る，

事象 B_{I}：壺Ⅰから黒玉が出る，

事象 R_{II}：壺IIから赤玉が出る，
事象 B_{II}：壺IIから黒玉が出る，
とおく．各事象に対する賭の選好はどうなるか.」

これに対して，多くの人が

$$R_{\mathrm{I}}\approx B_{\mathrm{I}},\ R_{\mathrm{II}}\approx B_{\mathrm{II}},\ R_{\mathrm{I}}<R_{\mathrm{II}},\ B_{\mathrm{I}}<B_{\mathrm{II}} \quad (8)$$

と答えるようである．明らかに，$\lesssim$と両立する確率測度 P は存在しない.

また，$\lesssim$は $Q4$を満たさない．$Q4$を仮定して矛盾を導こう．$E=R_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}}$，$F=B_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}}$，$G=R_{\mathrm{I}}\cap B_{\mathrm{II}}$とすると，$E\cap(F\cup G)=\emptyset$なので，Q4より，$F\lesssim G \Leftrightarrow E\cup F\lesssim E\cup G$となる．対偶をとって，

$$F>G \Leftrightarrow E\cup F>E\cup G \quad (9)$$

いま $E\cup F=R_{\mathrm{II}}>R_{\mathrm{I}}=E\cup G$ なので，(9)より，$F>G$，すなわち

$$(B_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}})>(R_{\mathrm{I}}\cap B_{\mathrm{II}}) \quad (10)$$

となる．次に，$E=B_{\mathrm{I}}\cap B_{\mathrm{II}}$，$F=R_{\mathrm{I}}\cap B_{\mathrm{II}}$，$G=B_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}}$とおくと，上と同様に$(R_{\mathrm{I}}\cap B_{\mathrm{II}})>(B_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}})$となる．これは(10)に矛盾する.

$\lesssim$と両立する集合関数 P は必然的に非加法的となる．(8)より，

$$P(R_{\mathrm{I}})=P(B_{\mathrm{I}})<P(R_{\mathrm{II}})=P(B_{\mathrm{II}}) \quad (11)$$

である．壺IIの玉の割合から明らかに，$P(R_{\mathrm{II}})=P(B_{\mathrm{II}})=1/2$である．$P(R_{\mathrm{I}})$は，意思決定者にとって R_{I}と無差別な賭で，客観確率が既知のものを見つけることで測れる．(11)より$0\leqq P(R_{\mathrm{I}})<1/2$の範囲でさがせばよい．例えば，$R_{\mathrm{I}}$に対する賭が「赤玉3個，黒玉4個入った壺から玉を1個取り出すとき，赤玉が出る」に対する賭と無差別なら，$P(R_{\mathrm{I}})=3/7$である．(11)から $P(B_{\mathrm{I}})=3/7$でもある．このとき，$R_{\mathrm{I}}\cup B_{\mathrm{I}}=\Omega$(全事象)にもかかわらず，$P(R_{\mathrm{I}})+P(B_{\mathrm{I}})<P(\Omega)=1$となるが，Schmeidler [29]は残りの$1/7(=P(\Omega)-P(R_{\mathrm{I}})-P(B_{\mathrm{I}}))$は意思決定者の確率の与え方に関する確信(のなさ)を表すとしている．客観的な確率値がまったく未知なので，安全のため $P(R_{\mathrm{I}})$，$P(B_{\mathrm{I}})$の見積もりを3/7と低めに抑えざるをえない．1/7は，その客観確率未知に対する不安を表すとみるのである．このように，非加法性を許すことによって，加法的な確率では表現できない状況も表すことができる.

しかし，この壺の問題に対して，「賭に対する選好だけで主観的確からしさを測るのは不適切だ」という態度をとることも可能である．主観的確からしさは従来の確率測度で表現できるが，賭に対する選好は主観的確からしさだけでは決まらずに，それ以外の要因，利用できる情報の量や質なども影響するとみるわけである．たとえば，情報量を導入して，人は「手もとにある情報がより有効に利用できると，“期待される”方式を選んでいる」(赤池[46])という解釈も可能である．しかしこの立場においても，便宜的手法として非加法的確率を導入することは拒否されないだろう．情報量などに関する解析を省き，種々の影響を含んだ主観的確からしさとして非加法的確率を用いる方が適切で現実的な場合があることは想像に難くない.

壺の問題の場合，Ω上の加法的確率測度ひとつだけでは状況を表しきれない．$P(R_{\mathrm{I}})=P(B_{\mathrm{I}})=1/2$とせざるを得ないからである．加法的確率だけで記述しようとすると，壺Iの赤玉の割合 θ の確率分布，すなわちΩ上でなく [0,1] 上の確率が必要となろう．明確にはわからない赤玉の割合 θ は確率分布で表現するしかない．通例その分布は主観によって決める．例えば [0,1] 上の一様分布などとする．赤池[46]も，θ の分布に関する期待値を用いている(彼の分布は $P(\theta=1/2)\neq 1$だけを仮定する一般的なもの)．しかし，非加法的確率を用いれば，上に示したようにΩ上の集合関数ただ一つだけで状況を記述することができる.

2.4 エキスパートシステムと確率測度

この節では，エキスパートシステムの確信度に確率測度を使用した場合の問題点を述べる.

エキスパートシステムのルールは，最も単純な場合，次のような形をしている：

If E then H.

例えば車の故障診断システムならば，E は「速度が上がらない」などという症状，H は「エンジン系統」などという故障箇所の候補となろう．ω_0を真の故障箇所，Ωを可能な故障箇所全体とすれば，診断システムはambiguityの枠組で考えることができる．この枠組で言うと，E はω_0に関する証拠(症状)，H は“$\omega_0 \in H$”の形の仮説(診断)である．

エキスパートシステムに確信度を用いたものがある．システム内にはエキスパートから抽出した確信度つきのルールがある．証拠を確信度つきで入力すれば，仮説が確信度つきで出力される．たとえば，「速度が上がらなければ，故障箇所はエンジン系統である：確信度0.8」というルールを持つシステムに「速度が上がらない：確信度0.9」という症状を入力すると，「故障箇所はエンジン系統：確信度0.72」などという診断が出力される．

この確信度に確率，とくに条件付確率が使われることがある．推論にはBayesの定理などの確率法則が用いられる．

しかし，抽出した確率値が常に確率法則に従うとは限らない．例えば，エキスパートたちは通例「E ならば H の確からしさは高くなる．E でないときは H の確からしさは変わらない．E でないことは H であることに何の影響も及ぼさない」と言う(Duda et al. [47])．これを確率を用いて表現すると，

$$P(H|E)>P(H)=P(H|E^c) \tag{12}$$

となろう．一方，確率法則から

$$P(H)=P(H|E)\cdot P(E)+P(H|E^c)\cdot P(E^c) \tag{13}$$

である．(13)式に $P(E^c)=1-P(E)$ と(12)式の $P(H|E^c)=P(H)$ を代入して整理すると，

$$P(E)\cdot[P(H|E)-P(H)]=0$$

となる．(12)より $P(H|E)-P(H)>0$だから，結局 $P(E)=0$となる．しかし，一般に $P(E)>0$と考えられるから，これは矛盾である．すなわち，上のエキスパートの知識は確率法則に反する．([47]でも確率法則に合わないことが示されているが，ここでの説明の仕方はそれとは異なる.)

この問題に対する一つの解決法は，確率値を法則にあうように修正することである．しかし，膨大な推論ネットの中でこれをやろうとすると，あるルールでの修正がそのルールとつながっている別のルールで新たな矛盾を生み，収拾がつかなくなってしまうおそれが大きい．

もう一つの解決法は，確率法則に縛られないようにすることである．たとえば，Bayes則をより緩いものに変更したり[47]，確率測度よりも柔軟な不確実性の測度(MYCINにおけるCF [48] など)を用いたりすることである．非加法的確率を使うこともこれに含まれる．

またエキスパートシステムにおいて，確率では無知と矛盾の区別ができないという問題もある．例えば $P(H)=P(H^c)=1/2$であることは，仮説 H に関して無知であること，すなわち何も情報がないことを意味するのか，矛盾する証拠，すなわち仮説を肯定する証拠と否定する証拠がともにあることを意味するのかが不明である．もし矛盾であれば，システムに入力された証拠が正確であったかどうかを検証する必要が出てくるだろう．無知と矛盾は区別されるべきである．なお，確率をもとに作られたCFもまったく同じ問題を持つ．

次節で説明するDempster-Shafer理論はこれらの問題を解決する一つの理論となっている．

2.5 Dempster-Shafer理論

本節では，belief function(以下，確信関数と呼ぶ．信頼関数とも訳される)という特殊なファジィ測度と，Shafer [8] に沿った確信関数の解釈を紹介する．その解釈を一言でいうと「証拠の表現」である．まず例から始める．この例のオリジナルはShafer [8] である．

[例2.5.1] ある店の金庫が破られた．これは間違いなく単独犯であることがわかった．さらに「犯人はたぶん左利きである」と解釈できる痕跡(これ

を a とする)と,「犯人はたぶん内部の者である」と解釈できる痕跡(b とする)が発見された．このときΩは次のように構成できる：

$$\Omega = \{LI, LO, RI, RO\}.$$

ここで，L,R はそれぞれ左利き，右利きを，I,O はそれぞれ内部，外部を示す．従って例えば，LI は犯人が左利きで内部の者であることを意味する．Ωの要素うちの正しいものを ω_0とする．さて，a に対する可能な解釈は

e_1^a：a は「左利き」を示す(犯人が左利きなので，a という痕跡が残った)．

e_2^a：a は「左利き」を示すとは限らない(痕跡 a の原因は不明)．

の2つであったとする．同様に b に対する解釈も次の2つとする：

e_1^b：b は「内部犯」を示す．

e_2^b：b は「内部犯」を示すとは限らない．

結局，上の事実に対する可能な解釈は次の4通りとなる(表1参照)：

e_{11}：e_1^a かつ e_1^b,

e_{12}：e_1^a かつ e_2^b,

e_{21}：e_2^a かつ e_1^b,

e_{22}：e_2^a かつ e_2^b.

解釈 e_{11}は“$\omega_0 \in \{LI\}$”を直接に支持し，解釈 e_{12}は“$\omega_0 \in \{LI,LO\}$”を直接に支持する．

ここで，e_{12}は“$\omega_0 \in \{LO\}$”を支持するのではないことに注意されたい．解釈 e_2^b「内部犯を示すとは限らない」は，内部犯であることを否定しない．痕跡 b は犯人が内部の者であったために残ったのではないが，たまたま内部犯だったということはあり得る．e_2^bは ω_0に関しては，単にわからないということしか言っていないのである．

表1　痕跡の解釈

	e_1^a (L)	e_2^a (L,R)
e_1^b (I)	e_{11} (LI)	e_{21} (LI,RI)
e_2^b (I,O)	e_{12} (LI,LO)	e_{22} (LI,LO,RI,RO)

e_{12}と同じ理由で，e_{21}は“$\omega_0 \in \{LI,RI\}$”を直接に支持する．解釈 e_{22}は「犯人については全くわからない」ということだが，Ωの要素のうちどれか一つは正しいので(ambiguity の標準設定)，“$\omega_0 \in \{LI,LO,RI,RO\}$”を支持すると見ることができる．各解釈 $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$の確信度をそれぞれ 0.18, 0.12, 0.42, 0.28としておく．

さて，Ωの各部分集合 E に対して，“$\omega_0 \in E$”を直接に支持する証拠解釈の確信度を $m(E)$ と書くことにする．“$\omega_0 \in E$”を直接に支持する証拠解釈 e とは，「ω_0は E に入っているらしいが，E のどこにあるかはわからない」というものである．今の場合，m は下のようになる：

$$m(E) = \begin{cases} 0.18 & E = \{LI\}, \\ 0.12 & E = \{LI,LO\}, \\ 0.42 & E = \{LI,RI\}, \\ 0.28 & E = \{LI,LO,\ RI,RO\}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

さて，「左利きで内部の者」(“$\omega_0 \in \{LI\}$”)ならば「左利き」(“$\omega_0 \in \{LI,LO\}$”)だから，e_{12}だけでなく e_{11}も「左利き」を支持する．したがって，「左利き」の総合的な確信度(これを $Bel(\{LI,LO\})$ とする)は e_{11}, e_{12}の確信度の合計0.3になろう：

$$Bel(\{LI,LO\}) = m(\{LI\}) + m(\{LI,LO\}) \\ = 0.3.$$

命題“$\omega_0 \in E$”に対する総合的な確信度を $Bel(E)$ とすると，同じ考え方により，$F \in E$ のとき，確信度 $m(F)$ を与える証拠は命題“$\omega_0 \in E$”も支持する．したがって，$Bel(E)$は命題“$\omega_0 \in E$”を支持する確信度の総和

$$Bel(E) = \sum_{F \subset E} m(F) \quad \forall E \in \Omega \tag{14}$$

となる．以下に具体的な計算例を示す：

$$Bel(\emptyset) = 0,$$
$$Bel(\{LI\}) = m(\{LI\}) = 0.18,$$
$$Bel(\{LI,RI\}) = m(\{LI\}) + m(\{LI,RI\}) \\ = 0.6,$$
$$Bel(\Omega) = m(\{LI\}) + m(\{LI,LO\})$$

$$+m(\{LI,RI\})+m(\{LI,LO,RI,RO\})$$
$$=1$$

上の例の Bel が確信関数である．上では2.1節の要請②，③に合うように，すなわち

$$Bel(\emptyset)=0, \tag{15}$$

$$Bel(\Omega)=1, \tag{16}$$

となるように e_{ij}の確信度を設定した．確信関数の数学的定義は以下のとおりである．

［定義2.5.1］ Ωを空でない有限集合とする．$Bel:2^{\Omega}\to[0,1]$ が確信関数であるとは，(15)，(16)が成り立ち，ある関数 $m:2^{\Omega}\to[0,1]$ が存在して(14)も満たされることをいう．このときの m を基本確率割当(basic probability assignment)という．また，$m(E)>0$なる部分集合 E は，焦点要素(focal element)と呼ばれる．

先の例の m は基本確率割当であり，その焦点要素は{LI}，{LI,LO}，{LI,RI}，{LI,LO,RI,RO}の4つである．

上の定義から直ちに確信関数が単調性を持つこと，すなわちファジィ測度であることがわかる．

$Bel(E)$は，集めた証拠がどのくらい“$\omega_0\in E$”を支持するかを表す．$Bel(E)=1$は「確実に“$\omega_0\in E$”である」ことを示す証拠があることを意味し，$Bel(E)=0$は“$\omega_0\in E$”を支持する証拠がまったくないことを意味する．したがって，$Bel(E)=0$は，単に証拠がないだけなので，「確実に“$\omega_0\notin E$”」を意味しない．

Bel を確信関数とすると，(14)，(15)より

$$m(\emptyset)=0 \tag{17}$$

であり，(14)，(16)より，

$$\sum_{F\subset\Omega} m(F)=1 \tag{18}$$

である．そこで，基本確率割当は(17)，(18)を満たす関数 $m:2^{\Omega}\to[0,1]$ として特徴づけることができる．式(18)は，数学的には m が2^{Ω}上の確率密度関数であることを示している．m の呼び名に「確率」が入っているのはこのためである．

Bel と m は一対一の関係にある．m から Bel は(14)式で，Bel から m は次式で得られる：

$$m(E)=\sum_{F\subset E}(-1)^{|E-F|}Bel(F). \tag{19}$$

確信関数 Bel は，基本確率割当 m を用いずに，(15)，(16)と次式(ファジィ測度論入門第1回の(15)式)を満たす集合関数としても定義できる．

$$Bel\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\geqq$$

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\cdots,n\}\\ I\neq\emptyset}}(-1)^{|I|+1}Bel\left(\bigcap_{i\in I}E_i\right) \tag{20}$$

ここで，$|I|$ は集合 I の要素数である．

確信関数は確率測度をその特殊な場合として含む．すなわち，次のことが言える：

Bel が加法的(Bel が確率測度) ⇔

焦点要素がすべて1点集合．

Bel が加法的であるとき，

$$Bel(E)=\sum_{\omega\in E}m(\{\omega\}) \qquad \forall E\in\Omega \tag{21}$$

であり，点関数 $m(\{\cdot\}):\Omega\to[0,1]$ はΩ上の確率密度関数になっている．

次に特殊な確信関数を2つ紹介する．

［定義2.5.2］ 次の確信関数 Vac は，空信頼関数(vacuous belief function)と呼ばれる．

$$Vac(E)\triangleq\begin{cases}1 & E=\Omega\\ 0 & E\neq\Omega\end{cases} \tag{22}$$

［定義2.5.3］ $F(\neq\emptyset)\subset\Omega$，$0<s\leqq1$とする．次の確信関数 S を単純支持関数(simple support function)と呼ぶ：

$$S(E)\triangleq\begin{cases}1 & E=\Omega,\\ s & F\in E,\ E\neq\Omega,\\ 0 & F\not\subset E\end{cases} \tag{23}$$

部分集合 F を S の焦点(focus)という．数値 s は S の支持度(degree of support)と呼ばれる．

(23)式の単純支持関数 S の基本確率割当 m は，

$$m(E)=\begin{cases}1-s & E=\Omega\\ s & E=F\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{24}$$

となっている．

焦点と焦点要素は異なる概念である．単純支持関数 S の焦点 F は焦点要素である．しかし，$s<1$ で $F\neq\Omega$ のとき，Ω は S の焦点要素であるが焦点ではない．

Vac は ω_0 に関する証拠を何も持っていないこと，すなわち完全な無知を表す．一方，単純支持関数は単一の証拠を表すのに適した確信関数である．特に，F を焦点とする支持度1の単純支持関数は「確実に"$\omega_0\in F$"である（ただし，ω_0 が F のどこにあるかは不明）」という情報を表す．Vac は Ω を焦点とする支持度1の単純支持関数である．

［例2.5.2］先の「金庫破り」の例で，痕跡 a からは焦点 {LI,LO}，支持度 $s_a\in[0,1]$ の単純支持関数 S_a を，b から焦点 {LI,RI}，支持度 $s_b\in[0,1]$ の S_b を構成できる：

$$S_a(E)\triangleq\begin{cases}1 & E=\Omega,\\ s_a & \{\mathrm{LI,LO}\}\in E,\ E\neq\Omega,\\ 0 & \{\mathrm{LI,LO}\}\not\subset E,\end{cases}$$

$$S_b(E)\triangleq\begin{cases}1 & E=\Omega,\\ s_b & \{\mathrm{LI,RI}\}\in E,\ E\neq\Omega,\\ 0 & \{\mathrm{LI,RI}\}\not\subset E.\end{cases}$$

ω_0 に関する証拠がいくつかあるとき，われわれはそれらを組合わせて，ω_0 の真値を推測する．これと同じように，複数の確信関数を結合して新しい確信関数を構成する方法がある．これは Dempster の結合則 (Dempster's rule of combination) と呼ばれ，次のように定義される．

［定義2.5.4］Bel_1，Bel_2 を Ω 上の確信関数，m_1，m_2 をそれぞれの基本確率割当とする．

$$m(\emptyset)\triangleq 0, \tag{25}$$

$$m(E)\triangleq\kappa^{-1}\cdot\sum_{F\cap G=E}m_1(F)\cdot m_2(G)\quad\forall E\neq\emptyset, \tag{26}$$

$$\kappa\triangleq 1-\sum_{F\cap G=\emptyset}^{n}m_1(F)\cdot m_2(G), \tag{27}$$

で定義される基本確率割当 m をもつ確信関数を Bel_1 と Bel_2 の直交和 (orthogonal sum) といい，$Bel_1\oplus Bel_2$ で表す．ただし，$\kappa=0$ のときには直交和は定義されない．

この結合則は，基本的に F と G の積集合 $F\cap G$ に基本確率の積 $m_1(F)\cdot m_2(G)$ を割り当てるものである．ただし，$m_1(F)>0$，$m_2(G)>0$，$F\cap G=\emptyset$ となる場合は，F, G それぞれを支持する証拠が矛盾することを意味するので，その部分を除外し正規化する．正規化するのは，"$\omega_0\in\Omega$"という仮定（ambiguity の標準設定）と要請③のためである．（正規化はすべきでないという意見もある．この問題は2.7節で扱う．）なお $\kappa=0$ は，Bel_1 のすべての焦点要素が Bel_2 のどの焦点要素とも矛盾すること，すなわち Bel_1 を与える証拠と Bel_2 を与える証拠が完全に矛盾することを意味する．完全に矛盾する証拠を，証拠として認めることはできない．すなわち，これらの証拠は結合できないのである．

［例2.5.3］例2.5.2における単純支持関数 S_a，S_b の直交和 $S_a\oplus S_b$ の基本確率割当 m は

$$m(E)=\begin{cases}s_a\cdot s_b & E=\{\mathrm{LI}\},\\ s_a(1-s_b) & E=\{\mathrm{LI,LO}\},\\ (1-s_a)s_b & E=\{\mathrm{LI,RI}\},\\ (1-s_a)(1-s_b) & E=\Omega,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

で与えられる．とくに $s_a=0.3$，$s_b=0.6$ とすれば，これは例2.5.1の基本確率割当 m になる．

Dempster の結合則では，結合される確信関数は互いに独立な証拠に基づいて得られたものと仮定されている．非独立な証拠から得られた確信関数を結合すると不都合が起こる．

［例2.5.4］北島氏から「非常に $\omega_0\in F$ らしい」との情報を得て F を焦点とする支持度0.9の単純支持関数 S_1 を，志潟氏から「どうも $\omega_0\in F$ らしい」との情報を得て F を焦点とする支持度0.7の単純支持関数 S_2 を構成したとする．S_1，S_2 それぞれの基本確率割当を m_1，m_2 とすると，

$$m_1(E)=\begin{cases}0.1 & E=\Omega,\\ 0.9 & E=F,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$m_2(E)=\begin{cases}0.3 & E=\Omega,\\ 0.7 & E=F,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

である．$S_1\oplus S_2$の基本確率割当を m とすると，定義2.5.4より，

$$m(E)=\begin{cases}0.03(=0.1\times 0.3) & E=\Omega,\\ 0.97(=0.1\times 0.7+0.9\times 0.7 & \\ \qquad +0.9\times 0.3) & \\ & E=F,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

となる．これは，F を焦点とする支持度0.97の単純支持関数である．ところが，志潟氏は北島氏から「非常に $\omega_0\in F$ らしい」と聞いたので「どうも $\omega_0\in F$ らしい」と語ったのであった．もともと支持度0.9しかないところから支持度0.97が出てくるこの結果は不合理である．
非独立な証拠の結合に関しては，下の性質 $C4$に も注意されたい．

直交和⊕は，次の性質をもつ：

C1(交換律)：$Bel_1\oplus Bel_2$, $Bel_2\oplus Bel_1$の一方が定義できれば他方も定義できて，
$Bel_1\oplus Bel_2=Bel_2\oplus Bel_1$.

C2(結 合 律)：$(Bel_1\oplus Bel_2)\oplus Bel_3$，$Bel_1\oplus(Bel_2\oplus Bel_3)$ の一方が定義できれば他方も定義できて，
$(Bel_1\oplus Bel_2)\oplus Bel_3=Bel_1\oplus(Bel_2\oplus Bel_3)$.

C3(単位元)：$Bel\oplus Vac$ は常に定義できて，
$Bel\oplus Vac=Bel$.

C4：$Bel\oplus Bel$ は常に定義できて，Bel が0，1以外の値をとることがあるなら，
$Bel\oplus Bel\neq Bel$.

次に確信関数と双対関係にある集合関数 plausibility function について述べる．

[定義2.5.5] Bel が確信関数のとき，次の関数 Pl を，plausibility function という．

$$Pl(E)\triangleq 1-Bel(E^c)\qquad \forall E\subset\Omega \tag{28}$$

Plausibility function がファジィ測度であることは容易に確かめられる．
(28)式に(14)式を代入すると，

$$\begin{aligned}Pl(E)&=1-\sum_{F\subset E^c}m(F)\\ &=\sum_{F\subset\Omega}m(F)-\sum_{F\cap E=\emptyset}m(F)\\ &=\sum_{F\cap E\neq\emptyset}m(F)\end{aligned} \tag{29}$$

となる．これを plausibility function の定義とすることもできる．また，

$$Pl(\emptyset)=0, \tag{30}$$
$$Pl(\Omega)=1, \tag{31}$$

と次の式(ファジィ測度論入門第１回の(16)式)

$$Pl\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)\leqq \sum_{\substack{I\in\{1,\cdots,n\}\\ I\neq\emptyset}}(-1)^{|I|+1}Pl\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right) \tag{32}$$

を満たす集合関数としても定義できる．

$Bel(E)$は“$\omega_0\in E$”が支持される度合なので，(28)式からすると，$Pl(E)$は“$\omega_0\in E$”でないことを支持するわけではない度合，言い換えると，“$\omega_0\in E$”が否定されない度合である．したがって，$Pl(E)=0$は「確実に“$\omega_0\notin E$”」を意味するが，$Pl(E)=1$は「確実に“$\omega_0\in E$”」を意味しない．(28)式の関係にある Bel と Pl の間には，次の関係もある：

$$Bel(E)\leqq Pl(E)\quad \forall E\in\Omega. \tag{33}$$

Bel は証拠を悲観的に見積もっており，Pl は楽観的に見積もっているとも言える．両者の相補的な性質を見るため，Ellsberg の壺の問題を確信関数と plausibility function を使って表してみよう．

[例2.5.5]Ellsberg の壺の問題では，壺IIの玉の割合しか判らないので，基本確率割当 m は

$$m(E)=\begin{cases}1/2 & E=R_{\mathrm{II}}\text{または}E=B_{\mathrm{II}}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおける．このときの確信関数は

$$Bel(R_{\mathrm{I}})=Bel(B_{\mathrm{I}})=0,$$
$$Bel(R_{\mathrm{II}})=Bel(B_{\mathrm{II}})=1/2,$$

となり，$R_{\mathrm{I}}\approx B_{\mathrm{I}}$，$R_{\mathrm{II}}\approx B_{\mathrm{II}}$，$R_{\mathrm{I}}<R_{\mathrm{II}}$，$B_{\mathrm{I}}<B_{\mathrm{II}}$ と両立する．ところで，「両方の壷からともに赤玉が出ること」より，「壷 I から赤玉が出ること（壷 II から何色が出るかは関係ない）」の方が，我々にとって明らかに確からしい．すなわち，$(R_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}})<R_{\mathrm{I}}$ である．しかし，上の確信関数では $Bel(R_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}})=Bel(R_{\mathrm{I}})=0$ となり，両者を区別することができない．けれども，plausibility function を用いれば，これを解決できる．上の基本確率割当 m と (29) 式から，

$$Pl(R_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}})=m(R_{\mathrm{II}})=1/2,$$
$$Pl(R_{\mathrm{I}})=m(R_{\mathrm{II}})+m(B_{\mathrm{II}})=1,$$

なので，$Pl(R_{\mathrm{I}}\cap R_{\mathrm{II}})<Pl(R_{\mathrm{I}})$ である．まとめると，壷の問題での選好 $\lesssim$ は以下の様に特徴づけられよう：

$$E\lesssim F \Leftrightarrow Bel(E)<Bel(F)\ \text{または}$$
$$(Bel(E)=Bel(F)\ \text{かつ}\ Pl(E)\leq Pl(F)).$$

最後に，前節のエキスパートシステムに関する問題に簡単にふれて，本節を終えたい．まず，「E ならば H の確からしさは高くなるが，E でないときは H の確からしさは変わらない」という知識は確信関数を用いて表現できる．確率の場合，2．4 節の (12) 式 $P(H|E)>P(H)=P(H|E^c)$ は成立しなかった．しかし，確信関数は確率測度より柔軟なので，そのようなことは起こらない．すなわち，

$$Bel(H|E)>Bel(H)=Bel(H|E^c) \qquad (34)$$

は許される．条件付確信関数とそれを用いた推論については，室伏［49］を参照されたい．

また，確信関数では無知と矛盾の表現は異なる．$|E|\geq 2$ なる焦点要素 E は部分的な無知を表す．これは $\omega_0\in E$ を支持するが，ω_0 が E のどこにあるかについては何も言っていない，すなわち未知だからである．特に，完全な無知は空確信関数 Vac で表される．一方，互いに素な焦点要素があることは，相反する証拠があること，すなわち矛盾を意味する．

今回は，主観確率の加法性を問題視し，非加法的確率（ファジィ測度）の必要性の説いた．確率解釈(c)の論理確率については何も述べられなかったが，論理確率が加法的である必然性もないと思われる．確信関数などの非加法的確率は論理確率としても有効ではないかと予想される．

加法性が必然である確率は，(b)の頻度論的確率だけであろう．(a)の組合せ的確率は，非常に素朴であり，(b), (c), (d)に発散，吸収されると考えられる．

Dempster-Shafer 理論については，基礎の基礎しか説明できなかった．この理論は非常に豊富な内容をもっており，本気で解説を始めたら一回で終わらずに，連載になってしまう．詳しい理論展開については，Shafer［8］を参照されたい．

次回は，可能性理論の解説と ambiguity の標準設定の見直しを行なう予定である．

参考文献

［1］-［41］前回の参考文献参照．

［42］A.N. Kolmogorov, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergeb. Math.Grenzgeb., Springer, 1933.（第二版邦訳：根本訳，確率論の基礎概念，東京図書，1975.）

［43］北川，新版 統計学の認識，白揚社，1968.

［44］T.L. Fine, Theories of Probability, Academic Press, New York, 1973.

［45］L.J. Savage, The Foundations of Statistics, John Wiley & Sons, New York, 1954.

［46］赤池，確率の解釈における困難について，統計数理研究所彙報 32（1984）117-127.

［47］R.O. Duda, P.E. Hart, and N.J. Nilsson, Subjective Bayesian methods for rule-based inference systems, National Computer Conference 45（1976）1075-1082.

[48] B.G. Buchanan and E.H. Shortliffe, Eds., Rule-Based Expert Systems, Addison-Wesley, 1984.

[49]室伏，信頼関数による推論，「ファジィシステム（仮題）」第4.6節，計測自動制御学会，出版予定．

［問い合わせ先］
〒227 横浜市緑区長津田町4259
東京工業大学 大学院 総合理工学研究科
システム科学専攻
菅野 道夫，室伏 俊明
TEL：045-922-1111（内）2641,2645
FAX：045-921-1485（専攻事務室）
EMAIL murofusi@sys.titech.ac.jp