



ファジィ推論(2)[†]

水本 雅晴*

今回は、ファジィ制御やファジィエキスパートシステムで使用されているファジィ推論法として、マムダニのファジィ推論法と簡略化推論法について紹介してきましたが、今回はこれら以外のファジィ推論法について紹介しましょう。また、多重ファジィ推論や多段ファジィ推論法についても説明します。

1. マムダニの方法以外のファジィ推論法

まず、前回述べたファジィ推論法を簡単に復習しておきましょう。

規則： If x is A then y is B

事実： x is A' (1)

結論： y is B'

のようなファジィ推論形式を、簡単に

規則： $A \Rightarrow B$

事実： A' (2)

結論： B'

と表すことにします。ここで、 A, A', B, B' はファジィ概念であり、それぞれ全体集合 X, X, Y, Y におけるファジィ集合であります。

式(2)のファジィ規則 $A \Rightarrow B$ のメンバーシップ関数は含意規則 $a \rightarrow b$ を用いて

$$\mu_{A \Rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y) \quad (3)$$

と与えられます。

式(2)の結論 B' は、事実 A' とファジィ規則 $A \Rightarrow B$ との max-min 合成 “o” を行うことによって得られます(推論の合成規則)。すなわち

$$B' = A' \circ (A \Rightarrow B) \quad (4)$$

$$\mu_{B'}(y)$$

$$= \bigvee_x \{ \mu_{A'}(x) \wedge [\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)] \} \quad (5)$$

のようになります。ここで、 $\bigvee = \max$ 、 $\wedge = \min$ を表します。

さて、式(3)を表す含意規則 $a \rightarrow b$ は数多く提案されていますが、今回は $a \rightarrow b$ として

$$a \rightarrow b = a \wedge b \quad (6)$$

のように $\min(\wedge)$ を採用したマムダニの方法 R_c を紹介しました。この方法を使うと、式(4)で、 $A' = A$ とした場合、前回述べたように

$$A \circ (A \Rightarrow B) = B$$

となり

規則： $A \Rightarrow B$

事実： A (分離規則) (7)

結論： B

なる分離規則が満たされることがわかります。

以上が、前回のマムダニのファジィ推論法の簡単なおさらいでしたが、今回はいろいろな含意規則 $a \rightarrow b$ を用いた場合のファジィ推論について説明してみましょう。

1.1 $a \rightarrow b$ として積演算を用いた場合 式(6)の $\wedge$ (min) の代わりに、

[†] Fuzzy Reasoning (2)

* Masaharu MIZUMOTO

大阪電気通信大学 経営工学科

Department of Management Engineering, Osaka Electro-Communication University

$$a \cdot b = ab \quad (\text{代数積}) \quad (8)$$

$$a \odot b = (a+b-1) \vee 0 \quad (\text{限界積}) \quad (9)$$

$$a \wedge b = \begin{cases} a & \cdots b=1 \\ b & \cdots a=1 \\ 0 & \cdots a, b < 1 \end{cases} \quad (\text{激烈積}) \quad (10)$$

といった積演算(t -norm)を採用した $a \rightarrow b$ を使用することも可能ですが、この場合も分離規則を満たすこと確かめてみて下さい。

なお、このような積演算 $*$ を用いた $a \rightarrow b = a * b$ は、 $a=0$ の場合

$$0 \rightarrow b = 0 * b = 0$$

となることより、2値論理での含意の公理($0 \rightarrow 1=1$, $0 \rightarrow 0=1$)を満たしていないことに注意して下さい。したがって、マムダニの方法も含め積演算を用いた $a \rightarrow b$ は厳密に言えば含意規則ではないといえます。

1.2 多値論理の含意規則を用いた場合

つぎに、含意の公理を満たす多値論理における含意規則 $a \rightarrow b$ を用いた場合について説明しましょう[3,4]。

まず、ルカシービッツ(Lukasiewics)の含意規則

$$a \rightarrow b = (1-a+b) \wedge 1 \quad (11)$$

を採用したザデーの方法(算術規則)Ra[5]

$$\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y) = (1-\mu_A(x) + \mu_B(y)) \wedge 1 \quad (12)$$

をみてみましょう。この場合、結論 B' は式(5)より

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) \\ = \bigvee_x \{ \mu_A(x) \wedge (1-\mu_A(x) + \mu_B(y)) \} \end{aligned} \quad (13)$$

と与えられます。

いま、 $A'=A$ のときにどのような結論 B' が得られるか、すなわち式(7)の分離規則を満たすかどうかを確かめてみましょう。式(12)を $\mu_B(y)$ を

パラメータとして描きますと図1のようになります。これより結論 $\mu_{B'}(y)$ は式(13)の意味から、 $\mu_A(x)$ と $(1-\mu_A(x) + \mu_B(y)) \wedge 1$ との交点の高さとして与えられます。すなわち

$$\mu_{B'}(y) = \frac{1 + \mu_B(y)}{2} \quad (14)$$

となります。これを図で表しますと図2のようになります。ここで、結論 B' は後件部の B より大きくなっていることに注意ください。

これよりザデーの方法Raでは $A'=A$ の場合 $B' \neq B$ となることから、自然な要求であります式(7)の分離規則を満たさないことになります。したがって、ルカシービッツの含意規則を採用したザデーの方法Raはファジィ推論法としては適していないといえましょう。

しかしながら、式(13)で使っている max-min 合成“ $\odot$ ”の代わりに、max- $\odot$ 合成という新しい合成法を使うと方法Raは分離規則を満たすようになることをつぎに示しましょう[6-9]。

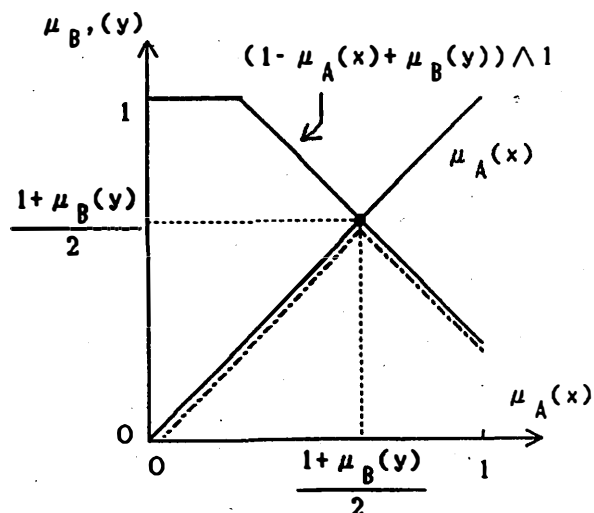


図1 $A'=A$ のときの式(14)の求め方

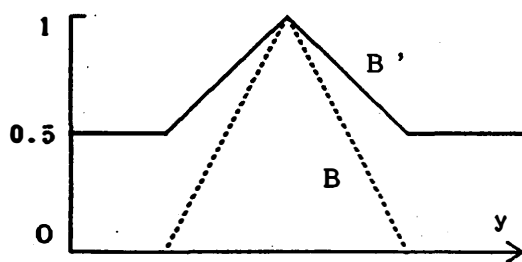


図2 式(14)の図示

1.3 新しい合成法の下でのファジィ推論

今までのファジィ推論の議論では、推論の合成規則として、式(5)のように max-min 合成を使ってきましたが、はたしてこの max-min 合成がファジィ推論法の合成法として適しているのかどうかみてみましょう。

式(4)の max-min 合成 “o” の代わりに、式(9)の限界積 $\odot$ を使った max- $\odot$ 合成 “ $\square$ ” を考えてみましょう [6-9]。max- $\odot$ 合成を使用した場合の結論 B' は

$$B' = A' \square (A \Rightarrow B) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \bigvee_x \{ \mu_{A'}(x) \odot [\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)] \} \\ &= \bigvee_x \{ \mu_{A'}(x) + [\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)] - 1 \} \vee 0 \end{aligned} \quad (16)$$

と与えられます。

この max- $\odot$ 合成を方法 Ra に適用するとどうなるでしょうか。

$A' = A$ の場合、式(12)の算術規則 Ra に対して結論 B' は式(16)より

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \bigvee_x \{ \mu_A + [(1 - \mu_A + \mu_B) \wedge 1] - 1 \} \vee 0 \\ &= \bigvee_x \{ [\mu_A + 1 - \mu_A + \mu_B - 1] \wedge [\mu_A + 1 - 1] \} \vee 0 \\ &= \bigvee_x \{ \mu_B(y) \wedge \mu_A(x) \} \\ &= \mu_B(y) \end{aligned} \quad (17)$$

となり、結局、 $A' = A$ のときに $B' = B$ となることがわかり、式(7)の分離規則が成立することになります。

このように max-min 合成の下では成立しなかった分離規則が max- $\odot$ 合成の下では成立するようになることがわかったと思います。限界積 $\odot$ の代わりに式(10)の激烈積 $\wedge$ を使っても成立します [9, 10]。このように min よりも小さな積演算を使いますと良好な推論結果が得られることがうなずけます。しかし、式(8)の代数積 $\cdot$ を使った場合には分離規則は成立しませんが、結論 B' は式(14)を2乗した形になります。なお、式(8)～(10)の積演算の大小関係は

$$\wedge \leq \odot \leq \cdot \leq \wedge \quad (18)$$

のように与えられ、激烈積 $\wedge$ が一番小さく、min が一番大きい積演算であることがわかります。方法 Ra に関しましては、限界積よりも小さな積演算を使った合成法の下では必ず分離規則を満たすことがいえます。

以上がルカシーピッツの含意規則に基づいた方法 Ra の場合でありましたが、他の含意規則 $a \rightarrow b$ (表1参照) に対しても同様な議論ができます。表2はこれらの含意規則を使用した場合の推論結果をかかげています [9-11]。この場合、 $A' = A$ の場合の他に $A' = \text{very } A$, rather A , not A とした場合の推論結果もかかげていますが、これらは

$$\mu_{\text{very } A}(x) = \mu_A(x)^2 \quad (19)$$

$$\mu_{\text{rather } A}(x) = \mu_A(x)^{0.5} \quad (20)$$

$$\mu_{\text{not } A}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (21)$$

のように与えられます。

表2からもわかるように、一般に、ファジィ推論においては max-min 合成を使うよりは max- $\odot$ 合成を使った方が良好な推論結果が得られることがうなずけます。

表1 種々の含意規則 $a \rightarrow b$

Ra:	$a \rightarrow b = (1 - a + b) \wedge 1$
Rm:	$a \rightarrow b = (a \wedge b) \vee (1 - a)$
Rc:	$a \rightarrow b = a \wedge b$
Rs:	$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \dots a \leq b \\ 0 & \dots a > b \end{cases}$
Rg:	$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \dots a \leq b \\ b & \dots a > b \end{cases}$
Rb:	$a \rightarrow b = (1 - a) \vee b$
R Δ :	$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \dots a \leq b \\ b/a & \dots a > b \end{cases}$

表2 $A', A \Rightarrow B$ からの推論結果 B'

$a \rightarrow b$	合成 A'	max-min 合成 "o"				max- $\odot$ 合成 " $\square$ "			
		A	very A	rather A	not A	A	very A	rather A	not A
$Ra: 1 \wedge (1-a+b)$		$\frac{1+\mu_B}{2}$	(*1)	(*3)	1	μ_B	μ_B	(*5)	1
$Rm: (a \wedge b) \vee (1-a)$		$0.5 \vee \mu_B$	(*2)	(*4)	1	μ_B	μ_B	$\frac{1}{4} \vee \mu_B$	1
$Rc: a \wedge b$		μ_B	μ_B	μ_B	$0.5 \wedge \mu_B$	μ_B	μ_B	μ_B	0
$Rs: \begin{cases} 1 \dots a \leq b \\ 0 \dots a > b \end{cases}$		μ_B	μ_B^2	$\sqrt{\mu_B}$	1	μ_B	μ_B^2	$\sqrt{\mu_B}$	1
$Rg: \begin{cases} 1 \dots a \leq b \\ b \dots a > b \end{cases}$		μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	1	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	1
$Rb: (1-a) \vee b$		$0.5 \vee \mu_B$	(*2)	(*4)	1	μ_B	μ_B	$\frac{1}{4} \vee \mu_B$	1
$Rd: \begin{cases} 1 \dots a \leq b \\ \frac{b}{a} \dots a > b \end{cases}$		$\sqrt{\mu_B}$	$\mu_B^{1/3}$	$\mu_B^{1/3}$	1	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	1

(注) (*1) $\frac{3+2\mu_B-\sqrt{5+4\mu_B}}{2}$ (*2) $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \mu_B$ (*3) $\frac{\sqrt{5+4\mu_B}-1}{2}$ (*4) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee \mu_B$

$$(*5) \begin{cases} \mu_B + \frac{1}{4} \dots \mu_B \leq \frac{1}{4} \\ \sqrt{\mu_B} \dots \mu_B \geq 1 \end{cases}$$

1.4 A' が確定した値である場合の推論結果

式(2)のファジィ推論において、 A' がファジィ集合でなく確定した値 x_0 である場合、すなわち

規則: $A \Rightarrow B$

事実: x_0

結論: B'

(22)

の場合の結論 B' はどのようにになるでしょうか。

$A'=x_0$ の場合、 $x \neq x_0$ に対して

$$\mu_{A'}(x) = 0, \quad \mu_{A'}(x_0) = 1 \quad (23)$$

となることに注意すれば、式(5)より結論 B' は

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \bigvee_{x \neq x_0} \{0 \wedge [\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)]\} \\ &\quad \vee \{1 \wedge [\mu_A(x_0) \rightarrow \mu_B(y)]\} \\ &= \mu_A(x_0) \rightarrow \mu_B(y) \end{aligned} \quad (24)$$

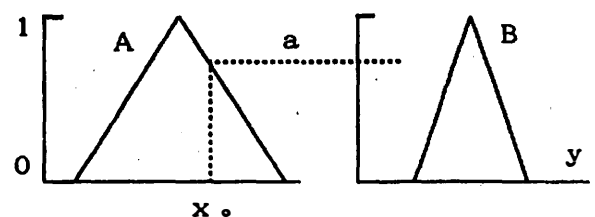
のように簡単に与えられます。

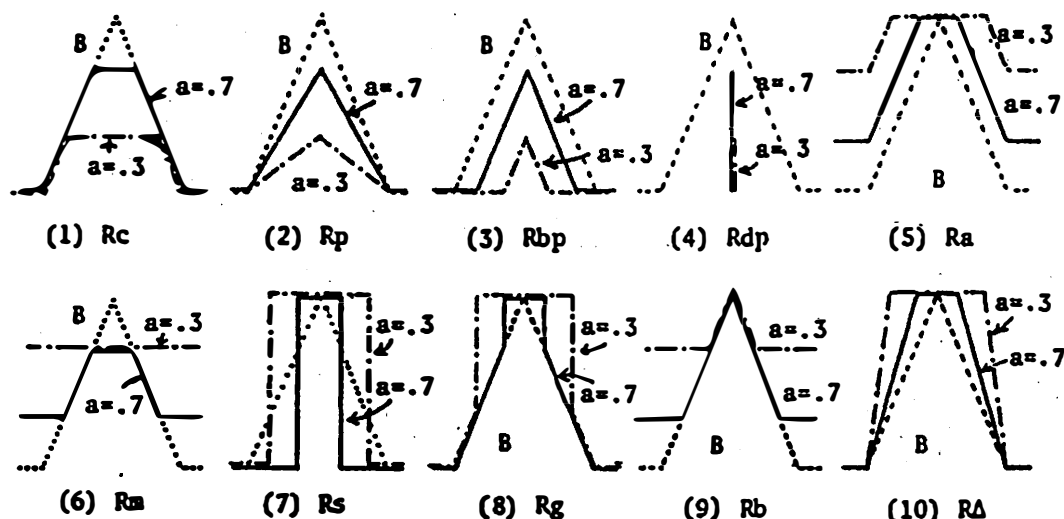
(注) max-min 合成以外の max- $\odot$ 合成などを使っても同じ結果が得られます。

いま、図3のようなファジィ規則 $A \Rightarrow B$ に対して、確定値 x_0 が与えられたときの推論結果 B' を各含意規則に対して描いてみますと図4のようになります[12]。ただし、 $a (= \mu_A(x_0))$ を 0.3 と 0.7

しています。図中の記号 $Rc, \dots, R\Delta$ は表1の含意規則に対応しています。ただし、 Rp, Rbp, Rdp は式(8)~(10)の代数積、限界積、激烈積をそれぞれ含意規則 $a \rightarrow b$ とした場合であります。

図4からもわかるように、 a の値を 0.3, 0.7 というふうに大きくしていけば、積演算を採用した Rc, Rp, Rbp, Rdp の推論結果も大きくなっていきますが、古典的な含意規則を採用した $Ra, Rm, \dots, R\Delta$ の場合では逆に小さくなっていくことに注意してください。

図3 $A'=x_0$ とファジィ規則 $A \Rightarrow B$

図4 $\mu_A(x_0)=a$ の場合の推論結果

2. 多重ファジィ推論

次に、式(2)のファジィ推論形式を一般化した多重ファジィ推論形式を取り上げてみましょう[13]。

規則 1: $A_1 \Rightarrow B_1$ also

規則 2: $A_2 \Rightarrow B_2$ also

.....

規則 n : $A_n \Rightarrow B_n$ (25)

事 実: A'

結 論: B'

ここで、 A_i, A' は集合 X での、 B_i, B' は Y でのファジィ集合です。

この多重ファジィ推論形式はファジィ制御やファジィ・エキスパート・システムでよく用いられているものです。

このファジィ推論形式の結論 B' の求め方を示してみましょう。この場合、含意規則 $a \rightarrow b$ のタイプにより式(25)の“also”の解釈が異なってくることに注意する必要があります。

2.1 マムダニの方法の場合

含意規則 $a \rightarrow b$ として $a \rightarrow b = a \wedge b$ のように $\min(\wedge)$ を採用したマムダニの方法 Rc では “also” は “or” と解釈されます。“or” として結

び(U)を採用しますと、結論 B' は、max-min 合成 “o” を使うことにより次のように与えられます。

$$\begin{aligned} B' &= A' \circ [(A_1 \Rightarrow B_1) \text{OR} \cdots \text{OR} (A_n \Rightarrow B_n)] \\ &= A' \circ [(A_1 \Rightarrow B_1) \cup \cdots \cup (A_n \Rightarrow B_n)] \\ &= [A' \circ (A_1 \Rightarrow B_1)] \cup \cdots \cup [A' \circ (A_n \Rightarrow B_n)] \\ &= B_1' \cup B_2' \cup \cdots \cup B_n' \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 $A_i \Rightarrow B_i$ は

$$\mu_{A_i \Rightarrow B_i}(x, y) = \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y) \quad (27)$$

です。

このように最終的な結論 B' は、まず個々の推論結果 $B_i' = A' \circ (A_i \Rightarrow B_i)$ を求め、それらの結び U を取ることによって求められることがわかります。

(注1) 一般に、 A をファジィ集合、 R, S をファジィ関係としますと、合成 o と U と $\cap$ との間には

$$A \circ (R \cup S) = (A \circ R) \cup (A \circ S)$$

$$A \circ (R \cap S) \subseteq (A \circ R) \cap (A \circ S)$$

といった関係が成立します。

(注2) 式(26)はマムダニの方法だけでなく、式(8) ~ (10)のような積演算 * (すなわち、 $a \rightarrow b = a * b$) を採用した Rp, Rbp, Rdp の場合にも成立します。また、max-min 合成 “o” 以外の合成に対しても成立します。

2.2 ザデーの方法などの場合

ザデーの方法 Ra を始め、表 1 の Rc 以外の方法(多値論理の含意規則を用いたもの)の場合には、

“also” を “and” と解釈する必要があります。すなわち、“and” を交わり $\cap$ と解釈すると、結論 B' は

$$\begin{aligned} B' &= A' \circ [(A_1 \Rightarrow B_1) \text{ AND } \cdots \text{ AND } (A_n \Rightarrow B_n)] \\ &= A' \circ [(A_1 \Rightarrow B_1) \cap \cdots \cap (A_n \Rightarrow B_n)] \end{aligned} \quad (28)$$

すなわち

$$\mu_{B'}(y) \quad (29)$$

$$= \bigvee_x \{ \mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_1 \Rightarrow B_1}(x, y) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_n \Rightarrow B_n}(x, y) \}$$

と与えられます。最終的に

$$\begin{aligned} B' &= A' \circ [(A_1 \Rightarrow B_1) \cap \cdots \cap (A_n \Rightarrow B_n)] \quad (30) \\ &\subseteq [A' \circ (A_1 \Rightarrow B_1)] \cap \cdots \cap [A' \circ (A_n \Rightarrow B_n)] \end{aligned}$$

といった関係が得られます。すなわち、一般に、結論 B' は、個々の推論結果 $B'_i = A' \circ (A_i \Rightarrow B_i)$ の交わり($\cap$)よりも小さくなっていることに注意してください。

【参考】何故、式(25)の also を or や and にと解釈を変えるかの理由を示してみましょう。マムダニの方法の場合、個々のファジィ規則からの推論結果 $B'_i = A' \circ (A_i \Rightarrow B_i)$ は、後件部 B_i よりも小さくなります(図 6 の後件部の斜線部分がこれに相当します)。小さくなったこれらの推論結果を統合するために結び($\cup$)が使われるのです。したがって、also が or と解釈されます。一方、ザデーの方法 Ra などの場合には、個々の推論結果 $B'_i = A' \circ (A_i \Rightarrow B_i)$ は、後件部 B_i よりも大きくなります(図 2 や図 4 (5)~(10)を参照)。大きくなったこれらの推論結果を統合するのに、もし結び($\cup$)を使いますとさらに大きくなってしまいますので、交わり($\cap$)を使って小さくする必要があります。したがって、also を and($\cap$)と解釈するのです。

【例】つぎのような非常に簡単な多重ファジィ推論を考えてみましょう。

$$\begin{array}{ll} \text{規則 1:} & \underline{3} \Rightarrow \underline{3} \\ \text{規則 2:} & \underline{5} \Rightarrow \underline{5} \\ \text{規則 3:} & \underline{7} \Rightarrow \underline{7} \\ \text{事 実:} & A' \\ \hline \text{結 論:} & B' \end{array} \quad (31)$$

ここで、 $\underline{3}$ は「3 ぐらい」を表すファジィ数であり、図 5 のようであるとします。

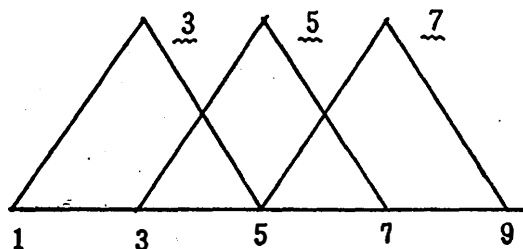


図 5 ファジィ集合 $\underline{3}$, $\underline{5}$, $\underline{7}$

まず、式(31)において

$$A' = \underline{5} \quad (32)$$

であった場合の結論 B' を求めてみましょう。

マムダニの方法 Rc の場合は、式(26)からもわかるように推論結果は分配的であることから、図 6 のように簡単に求められます。

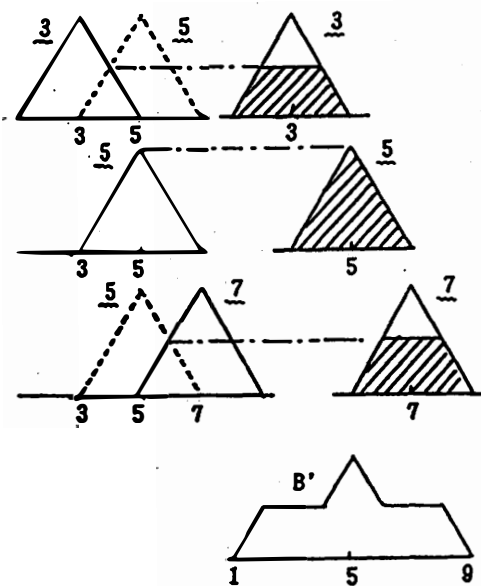


図 6 方法 Rc による結論 B' の求め方

次に、ザデーの方法 Ra の場合を考えてみましょう。式(28)からわかるように、結論 B' は分配的でないことから、マムダニの方法のように図的に簡単に求めることができません。方法 Ra の場合、式(29)は次のように書き直されます。

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) = & \bigvee_x \{ \mu_{A'}(x) \\ & \wedge (1 - \mu_{A_1}(x) + \mu_{B_1}(y)) \wedge \cdots \\ & \wedge (1 - \mu_{A_n}(x) + \mu_{B_n}(y)) \} \end{aligned} \quad (33)$$

すると式(31)の多重ファジィ推論で、 $A' = \underline{5}$ の場合、結論 B' は

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) = & \bigvee_x \{ \mu_{\underline{5}}(x) \wedge (1 - \mu_{\underline{3}}(x) + \mu_{\underline{3}}(y)) \\ & \wedge (1 - \mu_{\underline{5}}(x) + \mu_{\underline{5}}(y)) \wedge (1 - \mu_{\underline{7}}(x) + \mu_{\underline{7}}(y)) \} \end{aligned}$$

のように与えられます。結論 B' を解析的に求めてみると

$$\mu_{B'}(y) = \begin{cases} 0.5 & \cdots y \leq 3 \\ 1 - (5 - y)/4 & \cdots 3 \leq y \leq 5 \\ 1 - (y - 5)/4 & \cdots 5 \leq y \leq 7 \\ 0.5 & \cdots 7 \leq y \end{cases} \quad (34)$$

となります。

図7(a)は、表1の種々の含意規則 $a \rightarrow b$ を用いた場合の推論結果 B' を図示したものであります。式(31)の多重ファジィ推論において、 $A' = \underline{5}$ の場合にどのような結論 B' が得られれば妥当であるかは速断できませんが、 $\underline{5} \Rightarrow \underline{5}$ という規

則があるので、結論は $B' = \underline{5}$ であろうという立場に立てば、方法 Rs, Rg が $B' = \underline{5}$ という結論を得ていることがわかります。方法 Rc や Ra などは $\underline{5}$ を中心とした山形をしています、裾野がかなり広がっていることがわかります。

図7(b)は、前件部のファジィ集合 $\underline{3}$ 、 $\underline{5}$ 、 $\underline{7}$ とは一致しない

$$A' = \underline{4} \quad (35)$$

である場合の推論結果を描いています。この場合の推論結果の評価はさらに困難なものとなりますが、 $\underline{4}$ は $\underline{3}$ と $\underline{5}$ の中間にあることから、結論 B' も規則の形から $\underline{3}$ と $\underline{5}$ の中間にあるだろうとの立場に立てば、方法 Rs のみが $B' = \underline{4}$ という結論を得ていることがわかります。方法 Rc、Rm、Rb は点4の所で凹んだ推論結果を得ていることに注意して下さい。

以上は、max-min 合成の下での推論結果を示したものでありますが、max- $\odot$ 合成を用いるとさらに良い推論結果が得られます。

図8は、式(31)の多重ファジィ推論において、式(15)の max- $\odot$ 合成“ $\square$ ”を使用した場合の推論

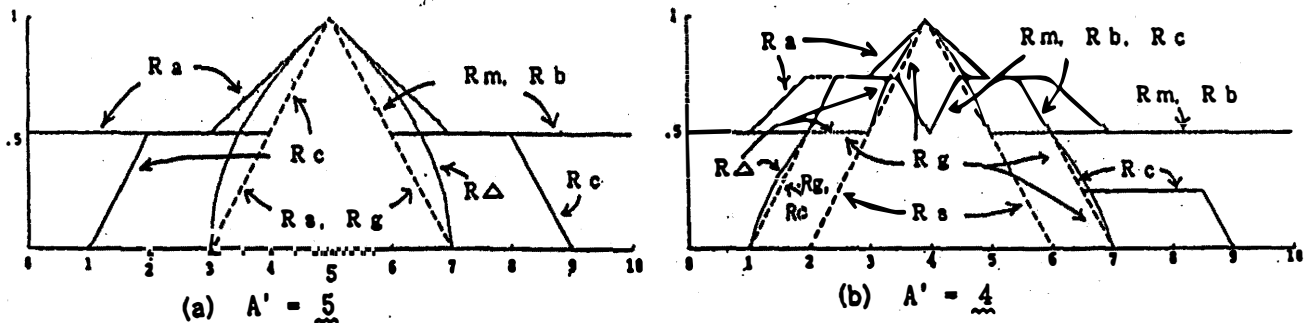


図7 式(31)の推論結果 B' (max-min 合成の場合)

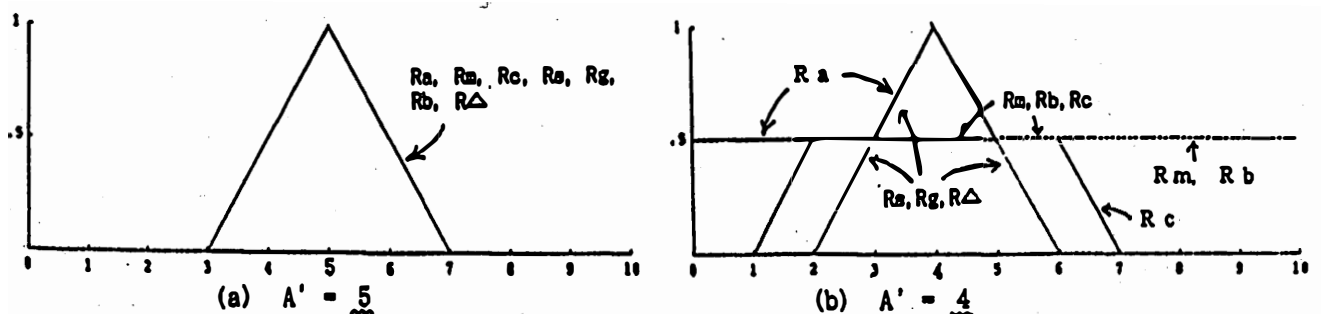


図8 式(31)の推論結果 B' (max- $\odot$ 合成の場合)

結果であります。同図(a)は $A' = 5$ の推論結果を表していますが、すべての方法が $B' = 5$ という推論結果を得ていることがわかります。同図(b)は $A' = 4$ の場合の推論結果を表していますが、方法 Rs, Rg, R△が $B' = 4$ という結論を得ていることがわかります。

以上の例題からわかることは、合成法としては max-⊙合成の方が、従来から使われている max-min 合成の場合よりも直感的に妥当な結論を得る場合が多く、また、推論方法としては Rs, Rg が良い推論結果を得ていることがわかります。しかしながら、ファジィ制御で良好な結果を得ているマムダニの方法 Rc では推論結果が凹んだりして、少なくともこの例からは満足いく推論結果を得ていないことがわかります。

3. 多段ファジィ推論

ここでは、三段論法の拡張としてファジィ三段論法およびファジィ n 段論法を説明します。また、多重ファジィ推論と多段ファジィ推論を組み合わせた一種の並列ファジィ推論とみなせる多重多段ファジィ推論法をマムダニの推論法を用いて議論していきましょう[13]。

まず、つぎの三段論法をみてみましょう。

規則 1 : 生活が規則正しい ⇒ 健康である
規則 2 : 健康である ⇒ 長生きできる (36)

規則 3 : 生活が規則正しい ⇒ 長生きできる
これを形式的に記すとつぎのようになります。

規則 1 : $A \Rightarrow B$
規則 2 : $B \Rightarrow C$ (37)
規則 3 : $A \Rightarrow C$

ここで、 A, B, C は集合 X, Y, Z におけるファジィ集合であります。

もし規則 1 と規則 2 の合成結果が規則 3 に等しければ、すなわち次式が成立すれば、三段論法が成立するといえます。

$$(A \Rightarrow B) \circ (B \Rightarrow C) = (A \Rightarrow C) \quad (38)$$

ここで、左辺は max-min 合成 “o” を使って

$$\begin{aligned} \mu_{(A \Rightarrow B) \circ (B \Rightarrow C)}(x, z) \\ = \bigvee_y \{ \mu_{A \Rightarrow B}(x, y) \wedge \mu_{B \Rightarrow C}(y, z) \} \end{aligned} \quad (39)$$

と与えられます。

たとえば、マムダニの方法 Rc を使うと、式(38)の左辺は、式(39)から

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \bigvee_y \{ [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \wedge [\mu_B(y) \wedge \mu_C(z)] \} \\ &= \mu_A(x) \wedge \mu_C(z) \wedge (\bigvee_y \mu_B(y)) \\ &= \mu_A(x) \wedge \mu_C(z) = \mu_{A \Rightarrow C}(x, z) \end{aligned}$$

となり、三段論法が成立することがわかります。

表 3 は種々の含意規則(表 1 参照)に対して三段論法が成立するかどうかをまとめたものです。この場合、max-min 合成 “o” の代わりに max-⊙合成 “□” を使用した場合の三段論法の成立結果もかかっていますが、この場合も max-⊙合成 “□” の場合の方が良好な結果を得ています。しかし、マムダニの方法 Rc では逆の結果を得ています。

表 3 三段論法の成立・不成立

方 法	Ra	Rm	Rc	Rs	Rg	Rb	R△
max-min 合成	×	×	○	○	○	×	×
max-⊙合成	○	×	×	○	○	○	○

次に、規則 1 の後件部と規則 2 の前件部が必ずしも一致していないようなファジィ三段論法を考えてみましょう。

規則 1 : 生活が規則正しい ⇒ 健康である
規則 2 : 非常に健康である ⇒ かなり長生きできる (40)

このファジィ三段論法を定式化してみますと

$$A \Rightarrow B, B' \Rightarrow C \quad (41)$$

となります。ここで、 B と B' は必ずしも一致していなくてもよいものとします。方法 Rc を使うと、式(41)は

$$\begin{aligned} \mu_{(A \Rightarrow B) \circ (B' \Rightarrow C)}(x, z) \\ = \bigvee_y \{ [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \wedge [\mu_{B'}(y) \wedge \mu_C(z)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_y \{ \mu_B(y) \wedge \mu_{B'}(y) \} \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_C(z) \\
&= b \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_C(z) \\
&= b \wedge \mu_{A \Rightarrow C}(x, z)
\end{aligned}$$

となります。ここで、 b は

$$b = \bigvee_y \{ \mu_B(y) \wedge \mu_{B'}(y) \}$$

であり、ファジィ集合 B と B' の一致度を表しています(図9参照)。

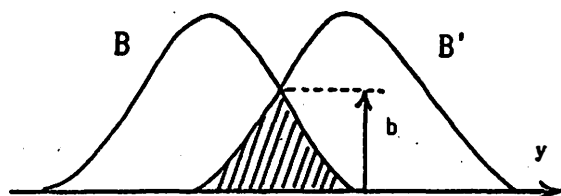


図9 ファジィ集合 B と B' の一致度 b

この B と B' の一致度 b を用いると、

$$(A \Rightarrow B) \circ (B' \Rightarrow C) = b \wedge (A \Rightarrow C) \quad (42)$$

のように表されます。

明らかに、 $B=B'$ の場合は $b=1$ となり、式(38)が成立し、三段論法が成立することになります。また、 B と B' が離れている(すなわち、共通部分がない)場合は、 $b=0$ となることより三段論法は成立しないことになります。また、 $b=0.5$ の場合は、三段論法が0.5の度合で成立することを表しています。このことから、一致度 b は三段論法の成立度合を表す指標となっていることがわかります。

【例】式(40)の例についていえば、「生活が規則正しい $\Rightarrow$ かなり長生きできる」の成立度合は、「健康である」と「非常に健康である」との一致度として与えられます。

一般に

$$A_1 \Rightarrow A_2, A_2' \Rightarrow A_3, \dots, A_{n-1}' \Rightarrow A_n \quad (43)$$

のようなファジィ n 段論法は

$$\begin{aligned}
&(A_1 \Rightarrow A_2) \circ (A_2' \Rightarrow A_3) \circ \dots \circ (A_{n-1}' \Rightarrow A_n) \\
&= a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge (A_1 \Rightarrow A_n) \quad (44)
\end{aligned}$$

のように表されます。ここで、 $a_i (i=2, \dots, n-1)$ はファジィ集合 A_i と A_i' の一致度であります。

次に、多重ファジィ推論と多段ファジィ推論を組み合わせた多重多段ファジィ推論を考えてみましょう。これは一種の並列ファジィ推論になっています。

今、つぎのような2つのグループからなるファジィ推論の例を考えてみます。

グループ1:

生活が規則正しい $\Rightarrow$ 健康である

生活が不規則である $\Rightarrow$ 不健康である

グループ2:

(45)

非常に健康である $\Rightarrow$ かなり長生きできる

普通である $\Rightarrow$ 平均寿命である

かなり不健康である $\Rightarrow$ 短命である

この場合、グループ1の後件部とグループ2の前件部とは必ずしも一致していないことに注意して下さい。このような場合、人間ならば容易に推論を行います、ファジィ推論でも模擬することが可能です。

このようなファジィ規則群に対して、「生活がとても規則正しい」という事実が与えられたときに、どのような長生きが可能かどうかをファジィ推論する問題を考えてみましょう。

このようなファジィ推論グループは形式的につぎのように表されます。

<グループ1>	<グループ2>	
$A_1 \Rightarrow B_1$	$B_1' \Rightarrow C_1$	(46)
$A_2 \Rightarrow B_2$	$B_2' \Rightarrow C_2$	
...	...	
$A_m \Rightarrow B_m$	$B_n' \Rightarrow C_n$	

ここで、 B_i と B_j' は必ずしも一致していなくてもよいものとします

すると、推論規則 $A_i \Rightarrow B_i, B_j' \Rightarrow C_j$ からは式(42)のように

$$(A_i \Rightarrow B_i) \circ (B_j' \Rightarrow C_j) = b_{ij} \wedge (A_i \Rightarrow C_j) \quad (47)$$

と表されます。 b_{ij} は B_i と B'_j の一致度であります。

すると、式(46)のような多重2段ファジィ推論から、次のような B_i と B'_j の一致度 b_{ij} からなる $m \times n$ ファジィ行列

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (48)$$

を作ることができます。このファジィ行列を“一致度行列”と名付けることにしましょう。

この一致度行列を用いることにより、式(46)のような多重2段ファジィ推論の推論結果の求め方を示してみましよう。

今、事実として A' が式(46)の<グループ1>のファジィ規則群に加えられたとします。この A' と A_i の一致度を a_i としますと、結論 B' は

$$\mu_{B'}(y) = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m] \circ \begin{bmatrix} \mu_{B1}(y) \\ \mu_{B2}(y) \\ \cdots \\ \mu_{Bm}(y) \end{bmatrix} \quad (49)$$

と与えられます。ここで、“o”は max-min 合成です。

さらに、得られた結論 B' が式(46)の<グループ2>に加えられたとしますと(図10参照)、結論 C' は

$$\mu_{C'}(z) = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \circ \begin{bmatrix} \mu_{C1}(z) \\ \mu_{C2}(z) \\ \cdots \\ \mu_{Cn}(z) \end{bmatrix} \quad (50)$$

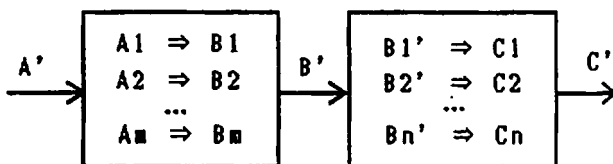


図10 多重2段ファジィ推論

と与えられます。ここで、 b_j は B' と B_j の一致度でありますが、これは式(48)の一致度行列を用いて

$$[b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \quad (51)$$

$$= [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m] \circ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

のように表すことができます。よって、結論 C' は

$$\mu_{C'}(z) = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m] \circ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mu_{C1}(z) \\ \mu_{C2}(z) \\ \cdots \\ \mu_{Cn}(z) \end{bmatrix} \quad (52)$$

のようにベクトルと行列の max-min 合成 “o” を用いて統一的に求めることができます(図11参照)。

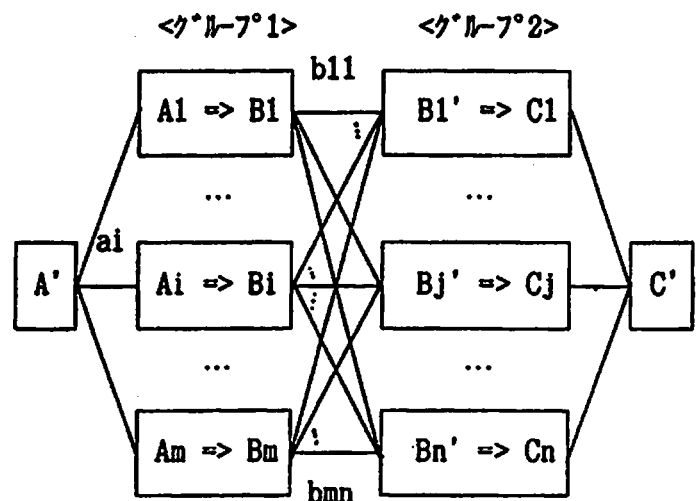


図11 式(52)の多重2段ファジィ推論の説明図

さらに、式(46)のファジィ推論規則のグループに第3のグループが加わったとき、すなわち

<グループ1>	<グループ2>	<グループ3>
$A_1 \Rightarrow B_1$	$B'_1 \Rightarrow C_1$	$C'_1 \Rightarrow D_1$
$A_2 \Rightarrow B_2$	$B'_2 \Rightarrow C_2$	$C'_2 \Rightarrow D_2$
...	...	...
$A_m \Rightarrow B_m$	$B'_n \Rightarrow C_n$	$C'_p \Rightarrow D_p$

のときの推論結果 D' は

$$\mu_{D'}(w) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m] \quad (54)$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mu_{D_1}(w) \\ \mu_{D_2}(w) \\ \dots \\ \mu_{D_p}(w) \end{pmatrix}$$

のように求められます。ここで、要素 c_{ij} はファジィ集合 C_i と C'_j の一致度を表します。

以上のように、式(53)のような多重多段ファジィ推論(一種の「並列ファジィ推論」と考えられる)は一致度行列を使用することにより統一的に取り扱うことができることがわかったと思います。

以上は、mamダニの方法 Rc を使った場合の定式化でありましたが、表1の含意規則 Ra や Rs などを用いた場合は分配性が成立しないことから上記のような多重多段ファジィ推論の定式化は極めて困難なものとなります。

以上、多重多段ファジィ推論での推論結果の統一的な求め方を示しましたが、図10にあるように1段目の推論結果 B' が2段目の入力となるために最終的な推論結果 C' はかなりばやけたものになることが予想されます。これがさらに多段になると、いわゆる「あいまいさの爆発」が生じることになります。それを避けるためには、 B' の非ファジィ化された値 b' を2段目の入力にすればあいまいさの爆発さはかなり避けられるものと思われます。したがって、実際的な応用の場面では、各段階での推論結果を非ファジィ化し、それを次の段階の推論に適用するといった方法が用いられるものと思われます。

4. おわりに

前回と今回に分けて、mamダニのファジィ推論法とそれ以外のファジィ推論法について説明してきました。mamダニの方法はファジィ制御法としては非常に有効な方法なのですが、ファジィ推論の立場からすれば必ずしも妥当な方法とはいえません。たとえば、式(31)のファジィ推論の例において、 A' が4であれば、 B' は4であろうと考えるのはごく自然ですが、mamダニのファジィ推論法 Rc では、図7(b)からわかるように推論結果は4のところで凹んだ形となっています。このように直観に合わない推論結果を得るmamダニの方法ですが、ファジィ制御で有効性を発揮しているのは、重心法といった非ファジィ化を使っているからです。事実、4のところで凹んだ推論結果でも重心値は4になります。

ザデーの方法などいわゆる含意規則に基づいた方法をファジィ制御に適用したことがありましたが[12]、あまり良い制御結果は得られませんでした。この理由として、たとえば図4(5)の Ra では推論結果は後件部より大きくなり横に広がる傾向にあるため、交わり($\cap$)を用いて統合してもかなり横幅の広い結論が得られ、したがって、重心値は中央付近に偏ることになるからだと思われます。

前回と今回では、いわゆる直接法とよばれるファジィ推論について述べてきましたが、今回は言語的真理値を介してファジィ推論を行う間接型のファジィ推論法について述べます。

参 考 文 献

1. 水本、ファジィ集合とファジィ推論、第3回「ファジィシステムシンポジウム」講演論文集、37-48, 1987.
2. 水本、Fuzzy 論理と Fuzzy 推論、数理科学、No. 284、10- 18、1987.
3. Mizumoto,M. & Zimmermann,H.J., Comparison of fuzzy reasoning methods, Fuzzy Sets and Systems, 8, 253-284, 1982.

4. 水本、種々のファジィ推論法—If…then…の場合—、電子通信学会論文誌、Vol.J64-D、No.5、379-386、1981.
5. Zadeh, L.A., Fuzzy logic and approximate reasoning, Synthese, 30, 407-428, 1975.
6. Mizumoto, M., Note on the arithmetic rule by Zadeh for fuzzy conditional inference, Cybernetics & Systems, 12, 247-306, 1981.
7. 水本、新しい推論の合成規則の下でのファジィ推論、電子通信学会論文誌、Vol.J65-D、No.11、1319-1325、1982.
8. Mizumoto, M., Fuzzy conditional inference under max- $\odot$ composition, Inform. Sciences, 27, 183-209, 1982.
9. Mizumoto, M., Fuzzy reasoning under new compositional rule of inference, Kybernetes, Vol.12, 107-117, 1985.
10. 水本、ファジィ推論法、システムと制御、Vol. 28、No.7、436-441、1984.
11. 水本、最近のファジィ理論、情報処理、Vol.29、No.1、11-22、1988.
12. Mizumoto, M., Fuzzy controls under various fuzzy reasoning methods, Information Sciences, Vol.45, 129-151, 1988.
13. 水本、多重ファジィ推論と多段ファジィ推論、第6回「ファジィシステムシンポジウム」講演論文集、435-440、1990.

(1992年5月5日受付)

[問い合わせ先]

〒572 寝屋川市初町18-8

大阪電気通信大学 経営工学科

水本 雅晴

☎：0720-24-1131(内線)2361

☎：0720-24-0014

E-mail : mizumoto@mzlab.osakac.ac.jp