



ファジィ関係とその演算[†]

大里 有生*

1. はじめに

われわれが日常的に使っている自然言語を考えてみますと、多様な文脈の中で「関係」という言葉をひんぱんに用いていることに気づきます。たとえば、人間同士の「親しい」、「似ている」などの関係、あるいは、国家間の「友好」関係とか「敵対」関係、企業間の「相互依存」関係や産官学の「協力」関係そして多種多様な「順序」関係などがそうです。こうした自然言語レベルでの関係という言葉の概念にはいろいろな意味が内包あるいは付与されています。こうした関係の意味、すなわち、「類似」、「友好」、「敵対」、「依存」、「協力」などの意味は、一般にあいまいなものです。こうした「あいまいな関係」は、その関係が完全に無い場合と有る場合の2極だけを想定するのみでは不十分で、どうしてもその中間すなわち関係の度合を計る必要性を生みます。たとえば、「やや類似」とか「消極的な友好」関係、「積極的な敵対」関係、「強力な依存」関係、あるいは、「前向きの協力」関係、というように。実は、こうした日常的に多用されている関係の概念の多くが、ここで述べるファジィ関係に該当するといつてよいでしょう。

一方、関係(relation)という概念それ自体は数学において明確に定められており、特に関数あるいは写像概念と密接に結びついた重要なものです。

同様に、ファジィ関係もファジィ集合論に基礎を置く基本的な概念であり、ファジィ理論の方法たとえばファジィシステムのモデリング、ファジィ推論、ファジィ類別、ファジィグラフなどにおいて極めて重要なものになっています。ファジィ関係(fuzzy relation)は、「もの」と「もの」、あるいは、ある集合とある集合との間のあいまいさを含む関連性を数量的に記述するための概念であり、たとえばつぎの文章、

「整数100は整数52の約2倍である」

「A氏とB氏は似ている」

「x市の積雪量はy市よりかなり多い」

にみられる「約2倍」、「似ている」、「かなり多い」の言葉が意味しているあいまいな関係を指します。一方、数学で定義されている関係は、以下に示すような文章、

「5は10の2倍である」

「a氏の身長はb氏の身長に等しい」

「整数10は整数9より大きい」

のように、はっきりした関係すなわち「2倍」、「等しい」、「大きい」などの明確な関係のみを扱います。

ファジィ関係は、こうした数学で定義されている関係にファジィネスの概念を導入し、それによってあいまいな関係をファジィ集合論的に数量化したものにほかなりません。また、ファジィ関係は合成演算の導入によって、あるファジィ集合から別のファジィ集合への変換あるいは写像としての役割も有していますので、システムの動的挙動を記述する上でも重要ですし応用範囲も広いといえます。以下では、まずファジィでない通常の関

† Fuzzy Relation and Its Operations
Ario OHSATO

* 長岡技術科学大学 工学部 計画・経営系
Department of Planning and Management Science, Faculty of Engineering, Nagaoka University of Technology

係概念について述べ、次に、ファジィ関係についての概念、定義、重要な性質についてさらに詳しく触れます。そして、後半ではファジィ関係の演算とそれを用いた方法について述べます。また、合成演算を用いたファジィ関係方程式の考え方についても簡単に紹介します。

2. 関係について

関係は、一般に、二つの集合 $X = \{x\}$ と $Y = \{y\}$ の任意の要素 x と y に対して定義されます。要素 x が要素 y に対して ρ という関係にあることを

$$x \rho y$$

のように書きます。 ρ は、たとえば、 x と y が等しいことを $x=y$ と書くときの記号 $=$ とその意味（この場合では、等しいという明確な意味）を一般的に表示したものです。この否定、すなわち、 x が y に対して ρ という関係にないことは

$$x \not\rho y$$

と表されます。この記号 $\not\rho$ は「 ρ という関係が成立していない」ことを意味しています。たとえば、「 x と y は等しくない」という関係を $x \neq y$ のように書きます。

一般に、関係 ρ といった場合には、ある集合 X , Y が念頭に置かれていて、それぞれの任意の要素 x , y の順序対 (x, y) に対して $x \rho y$ が成立するかしないかを問題にします。すなわち、集合 X と集合 Y の間に関係 ρ が定まるということは、すべての対 (x, y) に対して $x \rho y$ か $x \not\rho y$ かのどちらかが明確に規定されることと同じです。

X と Y のすべての要素による順序対の集合を $X \times Y$ のように書き、これを X と Y の直積あるいは直積集合と呼びます。

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \quad (1)$$

次に、集合 X と集合 Y の間の関係 ρ を直積 $X \times Y$ で考えてみます。関係 ρ とは、結局、 $X \times Y$ のすべての要素 (x, y) に対して $x \rho y$ あるい

は $x \not\rho y$ かのどちらかが定まることと同じですから、 $x \rho y$ が成立する順序対 (x, y) のみを集めると $X \times Y$ の中に以下に示す部分集合 R_ρ を定めることができます。

$$R_\rho = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \rho y\} \quad (2)$$

以上のように、一般に集合 X と Y との間の関係 ρ は直積集合 $X \times Y$ に部分集合 R_ρ を定めます。また、逆に $X \times Y$ のある部分集合は集合 X と Y の間のある種の関係 ρ を定めることになります。したがって、関係 ρ と部分集合 R_ρ とを同一視することができます。集合 X と Y との間の関係 ρ の概念図を表現すると図1のようになります。

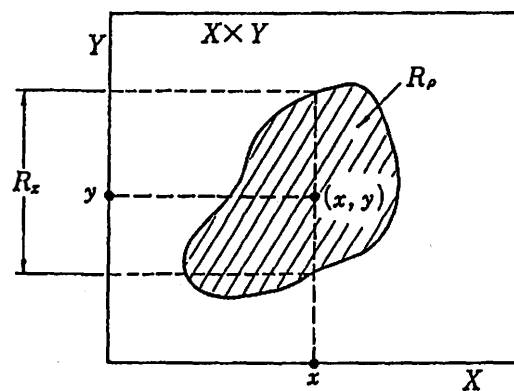


図1 集合 X と Y の間の関係 ρ が定める部分集合 R_ρ の概念図

すなわち、図1において、 $X-Y$ 平面上にある閉曲線の内側が部分集合としての R_ρ すなわち関係 ρ を指しており、 R_ρ の領域に含まれるすべての点 (x, y) が関係 ρ を満たす順序対を意味しています。また、外側の四角形の全域が直積集合 $X \times Y$ を示しています。

集合 X と Y との間の関係 ρ が定める $X \times Y$ の部分集合 R_ρ に関して以下のことがいえます。

$$\begin{aligned} (x, y) \in R_\rho &\leftrightarrow x \rho y, \\ (x, y) \notin R_\rho &\leftrightarrow x \not\rho y \end{aligned} \quad (3)$$

したがって一般に、部分集合 R_ρ を関係 ρ そのものとして扱い、集合 X と Y との間の関係 R_ρ あ

るいは $X \times Y$ 上の関係 $R\rho$ と呼びます。さらに ρ も省略して単に $X \times Y$ 上の関係 R (あるいは X から Y への関係 R) と呼ぶこともあります。

以上の関係 R は相異なる二つの集合 X と Y に関するものですが、 X と Y が等しい場合の関係すなわち $X \times X$ あるいは $Y \times Y$ 上の関係 R を考えることもできます。

以上のような二つの集合間の関係は 2 項関係 (binary relation) と呼ばれていますが、一般に n 個の集合間の関係も同様に考えることができます。これは n 項関係 (n -ary relation) と呼ばれており、 n 個の集合 $X_1, X, \dots, X_n$ の直積集合 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ の部分集合 R として以下のように表されます。

$$R \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \quad (4)$$

再び 2 項関係に話を戻します。集合 X と Y との間の関係 ρ は直積集合 $X \times Y$ の部分集合 $R\rho$ ですので、その定義関数 $\chi: X \times Y \rightarrow \{1, 0\}$ は

$$\begin{aligned} \chi_{R\rho}(x, y) &= 1 \quad (\text{if } (x, y) \in R\rho) \\ &= 0 \quad (\text{if } (x, y) \notin R\rho) \end{aligned} \quad (5)$$

となります。上式は、関係 ρ の定義関数による表現にほかなりません。

ところで、一般に、関係 R という概念は記号論理学における命題あるいは命題関数と密接に関連しています。たとえば、関係を以下のように説明することもできます [1]。

『集合 X および Y をそれぞれの変域とする変数 x, y を含む命題 $R(x, y)$ において、 x, y にそれぞれ X および Y の元を代入したとき真か偽かが定まるとき、 $R(x, y)$ を関係または 2 項関係という。例えば、" $x \leq y$ ", " x は y の約数である", "点 x は直線 y の上にある", "直線 x と直線 y は直交する". $R(x, y)$ は xRy と書かれることが多い。……』

すなわち、上の説明からわかりますように、集合 X と Y との間に関係 ρ が定まるということは、関係 ρ と意味的に等価なある命題関数 $R\rho(x, y)$

が存在して、その命題関数の真偽がすべての順序対 $(x, y) \in X \times Y$ に対して明確に判明することと同じです。そこで、関係 ρ に関する命題関数 $R\rho$ が真のときを 1、偽のときを 0 としますと、すべての (x, y) に対する命題関数の値 $R\rho(x, y)$ は

$$\begin{aligned} R\rho(x, y) &= 1 \quad (\text{if } x \rho y) \\ &= 0 \quad (\text{if } x \not\rho y) \end{aligned} \quad (6)$$

となります。このとき、(5)式と(6)式は等価であることがわかります。すなわち、 $X \times Y$ 上のある関係 ρ すなわち部分集合 $R\rho$ の定義関数は、 ρ に関する命題関数と同値な概念であるといえます。

次に、関係と写像あるいは関数との関連について考えてみましょう。一般に、集合 $X = \{x\}$ から集合 $Y = \{y\}$ への写像あるいは関数が定まっている場合を考えると、写像を 2 項関係の特殊な場合として扱うことができます。まず、 X から Y への写像 f を

$$f: X \rightarrow Y \quad (7)$$

のように書き、 f は X の各要素 x に Y の一つの要素 y を対応させるといい、これを

$$y = f(x) \quad (8)$$

のように表します。また、写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、直積集合 $X \times Y$ の部分集合 G_f

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y \quad (9)$$

を f のグラフといいます。このとき、グラフ G_f は $X \times Y$ の部分集合ですので、 G_f は $X \times Y$ のある関係 R を定めます。その関係とは、 X の要素 x と Y の要素 y との間が $y = f(x)$ という関係をもっているという意味となります。ただし、ここで注意すべきことは、写像 f のグラフ G_f は X の任意の要素 x に対して関係 $y = f(x)$ を満たす Y の要素 y が複数個あるのではなく一つのみ存在する場合の関係を意味しています。これに対して、一般に $X \times Y$ 上の関係 R といった場合には、 X の任意の要素 x に対して関係 R を満たす Y の要素 y が複数個存在してもかまいません。たとえ

ば、図1に示す関係 R_p では、 X の要素 x に対して関係 p を満たす Y の要素 y は一つでなくたくさん存在します。すなわち、図中に示す Y の部分集合 R_x に属するすべての要素 y は x との関係を満たしています。したがって、以上みましたように、写像 f のグラフは関係の特殊な場合に相当します。

ところで、図1において、関係 R は X の要素 x に Y の部分集合 R_x を対応させているとみなすことも可能です。すなわち、一般に $X \times Y$ 上の関係 R においては、 X の要素 x に Y の一部分集合 R_x を対応させる写像 F が以下のように定まります。

$$F: X \rightarrow P(Y) \quad (10)$$

ただし、 $P(Y)$ は Y のすべての部分集合の族を意味し、 $F(x) = R_x$,

$$R_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in R, x \in X\} \quad (11)$$

となります。

またこのとき、写像 F により、 X の任意の部分集合 A に対応する Y の部分集合 $F(A)$ を以下のように定めることが可能となります。

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) \quad (12)$$

すなわち、上式は A に属する要素 x に対応する Y の部分集合 $F(x)$ を A のすべての要素に対して求め、それらすべての和集合を $F(A)$ とすることを意味しています。

以上のように、関係という概念は写像(あるいは関数)を特殊な場合として含むとともに、関係それ自体も写像としての機能をもっているといえます。以上述べた関係概念は次に述べるファジィ関係を理解する上で重要です。

3. ファジィ関係について

3.1 ファジィ関係の定義

集合 $X = \{x\}$ と集合 $Y = \{y\}$ との間のファジィ関係 R は、 $X \times Y$ 上のファジィ集合として定義され、そのメンバシップ関数 μ は

$$\mu_R: X \times Y \rightarrow [0, 1] \quad (13)$$

のように表されます[2]。 X と Y の任意の要素 x と y に対する R のメンバシップ値 $\mu_R(x, y)$ は閉区間 $[0, 1]$ 中の適当な実数値をもち、 x と y との間の関係の度合を意味しています。すなわち、1に近ければ近いほどファジィ関係 R が満たされる度合が高く、0に近いほどファジィ関係 R が満たされない度合を指します。そこで、ファジィ関係の一例を以下に示してみましよう。

[例1] X と Y を実数値集合としたとき、 X と Y の任意の要素 x と y に対して “ x is close to y ” すなわち “ x は y に近い(数値である)” というファジィ関係 R_{close} を考えてみます。

この場合、たとえば、メンバシップ関数を以下のように定めることができます[3]。

$$\mu_{R_{\text{close}}}(x, y) = e^{-a|x-y|} \quad (14)$$

ただし、上式右辺の a は適当な係数を意味しています。このメンバシップ関数は、 $x=y$ のとき値1をとり、 x と y の差が大きくなる(すなわち近くなる)につれて次第に値0に近づきます。

3.2 ファジィ写像としてのファジィ関係

$X \times Y$ 上のファジィ関係 R は $X \times Y$ 上のファジィ集合ですので、これを図で表す場合には図2に示すように $X-Y$ 平面上の破線で便宜的に表したりします。

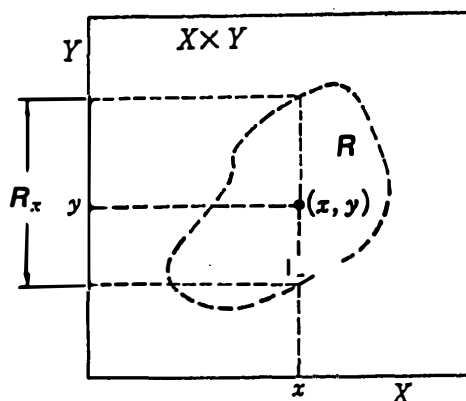
図2 ファジィ関係 R の概念図

図2において、 R_x は点 x で X 軸を垂直に R を切ったときに得られる Y 上のメンバシップ関数ですが、これを x に対応する Y 上のファジィ集合と解釈することができます。すなわち、 $X \times Y$ 上のファジィ関係 R は以下に示す写像 F を定めます。

$$F: X \rightarrow P(Y) \quad (15)$$

ただし、

$$F(x) = R_x, \quad (16)$$

$$\mu_{R_x}(y) = \mu_R(x, y), \quad y \in Y. \quad (17)$$

ただし、 $P(Y)$ は Y 上のすべてのファジィ集合の族を表します。すなわち、ファジィ関係 R は、 X の任意の要素 x に $P(Y)$ の一つの要素 R_x を対応させる写像 F と解釈できます。したがって、こうしたファジィ関係 R の写像 F としての意味は、前述の(クリस्प)関係 R の写像 F としての意味と同様であることがわかります。上の写像 F はファジィ写像(fuzzy mapping)と呼ばれています。

次に、 X の任意の部分集合を A とすると、ファジィ写像 F は A にどのような Y 上のファジィ集合を対応させるかを考えてみます。これを F による A のファジィ像(fuzzy image)と呼び $F(A)$ と書くとし、 $F(A)$ は(クリस्प)関係における式(12)を自然に拡張することによって以下のように定められます。

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) = \bigcup_{x \in A} R_x \quad (18)$$

ただし、上式右辺の $F(x)$ すなわち R_x は x に対応する Y 上のファジィ集合であり、 $\bigcup$ はファジィ集合に対する和集合演算を示します。したがって、 $F(A)$ の Y 上におけるメンバシップ関数は次式によって定められます。

$$\mu_{F(A)}(y) = \bigvee_{x \in A} \mu_{R_x}(y), \quad y \in Y \quad (19)$$

また、ここで、部分集合 A の定義関数

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= 1 & (\text{if } x \in A) \\ &= 0 & (\text{if } x \notin A) \end{aligned}$$

を考えこれを導入すると、式(19)は等価的に以下のように書き換えられます。

$$\begin{aligned} \mu_{F(A)}(y) &= \bigvee_{x \in A} \mu_{R_x}(y) \\ &= \bigvee_{x \in A} (1 \wedge \mu_{R_x}(y)) \\ &= \bigvee_{x \in X} (\chi_A(x) \wedge \mu_{R_x}(y)) \\ &= \bigvee_{x \in X} (\chi_A(x) \wedge \mu_R(x, y)) \end{aligned} \quad (20)$$

そこで、式(20)を簡単に以下のように表示します。

$$F(A) = A \circ R \quad (21)$$

あるいは、上式をメンバシップ関数と定義関数を用いて次式のように書いたりします。

$$\mu_{F(A)} = \chi_A \circ \mu_R \quad (22)$$

上式右辺の記号 $\circ$ は $\sup \cdot \min$ 合成演算と呼ばれ [2], 集合 X が有限集合の場合には $\sup$ 演算 ($\vee$) は $\max$ (最大) 演算となりますので $\max \cdot \min$ 合成演算と呼びます。

3.3 ファジィ集合間の直積

二つのファジィ集合の直積は一つのファジィ関係を定めます [3]。 A を全体集合 X 上のファジィ集合、 B を全体集合 Y 上のファジィ集合とします。このとき、 A と B の直積 $A \times B$ は $X \times Y$ 上のファジィ関係となり、そのメンバシップ関数は以下のように定義されます。

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y), \quad (x, y) \in X \times Y \quad (23)$$

こうした直積によってファジィ関係 $A \times B$ を生成する考え方は、ファジィ条件文

IF " x is A " THEN " y is B "

すなわち $A \rightarrow B$ (A ならば B) を X と Y との間のファジィ関係 $A \times B$ として解釈する方法の一つとして用いられています [3]. また、 $A \times B$ を " A coupled with B " と解釈する考え方もあります. 特に、 $A \times B$ によるファジィ関係の生成は、推論の合成則 (compositional rule of inference) におけるファジィ関係による推論において重要であり、特にファジィ制御における実用面での推論ではこうした直積によるファジィ関係の記述が多用されています [5].

3.4 逆ファジィ関係

$X \times Y$ 上のファジィ関係 R の逆ファジィ関係を R^{-1} と書きます. R^{-1} は $Y \times X$ 上のファジィ関係であり、そのメンバシップ関数は以下のように定められます.

$$\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y), \quad (y, x) \in Y \times X \quad (24)$$

したがって、 R が定まればその逆も定まります. たとえば、 R が " x は y に近い " というファジィ関係ならば、その逆ファジィ関係 R^{-1} は " y は x に近い " ということになります.

4. ファジィ関係の合成演算

ファジィ関係はファジィ集合そのものですので、ファジィ集合に関する種々の演算 (たとえば、和集合、共通集合、補集合など) はすべてファジィ関係同士の演算に適用することができます. ところが、ファジィ集合の演算というよりはむしろファジィ関係特有の演算とみた方がよい演算があります. それがファジィ関係の合成演算です. 合成演算といってもいろいろなものが提案されていますが、

ここでは、最もよく用いられている sup・min 合成演算を中心に話を進めます.

4.1 sup・min 合成演算

一般に、二つのファジィ関係 Q と R の sup・min 合成を $Q \circ R$ のように書きます. たとえば、 Q を $W \times X$ 上のファジィ関係、 R を $X \times Y$ 上のファジィ関係とすると、 $Q \circ R$ は $W \times Y$ 上のファジィ関係となり、そのメンバシップ関数は

$$\begin{aligned} \mu_{Q \circ R}(w, y) \\ = \bigvee_{x \in X} (\mu_Q(w, x) \wedge \mu_R(x, y)) \end{aligned} \quad (25)$$

となります [2, 3]. 二つのファジィ関係の合成は、別のファジィ関係を生成する機能を持ちます. すなわち、合成された $Q \circ R$ は集合 $W = \{w\}$ と集合 $Y = \{y\}$ の間のファジィ関係であり、その意味は、たとえば、 Q を " w は x にほぼ等しい " というファジィ関係とし、 R を " y は x より幾分大きい " としますと、 $Q \circ R$ は " y は w より幾分大きい " というファジィ関係として解釈されます.

4.2 ファジィ関係の合成による写像

以上は二つのファジィ関係の合成でしたが、 Q がファジィ関係でなくファジィ集合 A の場合にも、同様にして A と R との sup・min 合成 $A \circ R$ を定めることができます.

A を $X = \{x\}$ 上のファジィ集合とし、 R を $X \times Y$ 上のファジィ関係としますと、 $A \circ R$ は $Y = \{y\}$ 上のファジィ集合となり以下のように定められます.

$$\mu_{A \circ R}(y) = \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \mu_R(x, y)), \quad y \in Y \quad (26)$$

ところで、式 (15) ~ (17) に示したようにファジィ関係はファジィ写像 $F: X \rightarrow P(Y)$ と解釈することができます. 一方、 X の (クリस्प) 部分集合 A の F によるファジィ像 $F(A)$ のメンバシップ関数は式 (20) より以下のように定められます.

$$\mu_{F(A)}(y) = \bigvee_{x \in X} (\chi_A(x) \wedge \mu_R(x, y)) \quad (20)$$

そこで、式(26)と上式のそれぞれの右辺を比較すると、式(26)では A がファジィ集合であり、上式では A がクリスプ集合となっているだけでそれ以外は同じです。すなわち、式(20)右辺の定義関数 χ_A をメンバシップ関数 μ_A に置き換えたものが式(26)になっていて、 X 上のクリスプ集合 A がファジィ集合 A になった場合の自然な拡張になっていることがわかります。したがって、ファジィ集合 A とファジィ関係 R との $\sup \cdot \min$ 合成 $A \circ R$ は、ファジィ集合 A に対してファジィ写像 F が誘導する Y 上のファジィ集合と同値となります。これを $F(A)$ と書くとし、式(21)を拡張することによって $F(A)$ は

$$F(A) = A \circ R \quad (27)$$

のように表されます。

したがって以上より、 $X \times Y$ 上にある一つのファジィ関係 R が定まっているときには、 X 上の任意のファジィ集合 A に対して、それに対応する Y 上のファジィ集合を合成 $A \circ R$ によって定めることが可能となります。すなわち、ファジィ関係 R が定めるファジィ写像 F が、 X 上のファジィ集合 A に対応する Y 上のファジィ集合を $F(A)$ として誘導している、と解釈できることになります。

5. ファジィ関係方程式とその解法

5.1 ファジィ関係方程式

4.2 で示したように、ファジィ関係の合成は写像としての機能をもちますので、ファジィシステムの入力-出力関係式を記述する上で有用となります。たとえば、図3に示す概念図は x をファジィ入力、 y をファジィ出力とするファジィシステムを表しています。

図3において、 x は適当な入力集合 $X = \{x\}$ 上のファジィ集合、 y は出力集合 $Y = \{y\}$ 上のファジィ集合、 R は $X \times Y$ 上のファジィ関係で X と

Y との間の因果性を示しています。いま、 R が既知のものとして与えられているとすると、任意のファジィ入力 x に対するファジィ出力 y を $\sup \cdot \min$ 合成によって以下のように記述することができます。

$$x \circ R = y \quad (28)$$

一方、図3のファジィシステムにおいて、もしファジィ関係 R が未知の場合には、ファジィ入力 x とファジィ出力 y を知ることによって式(28)を近似的に満たす R を求める問題が生じます。この問題は、ファジィシステムの同定問題と呼ばれています [6]。また、 R と y が既知で、そのときの x が未知の場合もあります。この問題は、システムの逆問題と呼ばれており、診断問題に対応します [7]。結局、これらの問題は式(28)において、 x 、 R のどちらかが未知のときに一方を求める問題ということになりますが、このような未知のファジィ集合あるいはファジィ関係を含む方程式をファジィ関係方程式と呼んでおります [8]。また、式(28)の x 、 y の代わりにファジィ関係 Q 、 T を置くことによって記述される $Q \circ R = T$ もファジィ関係方程式と呼ばれます。ファジィ関係方程式の解法はファジィシステムの同定問題あるいはファジィ診断問題などを解く方法の一つとなっております。そこで以下では、ファジィ関係方程式に対する代表的な解法を紹介しましょう。

まず、ここでは以下に示すファジィ関係方程式を未知のファジィ関係 R について解く問題を扱います。

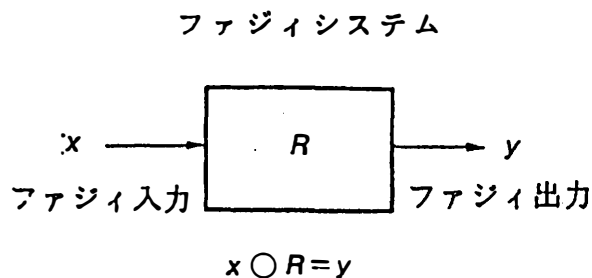


図3 ファジィ関係 R によるファジィシステムの記述

$$A \circ R = B \quad (29)$$

$$Q \circ R = T \quad (30)$$

ただし、 R は $X \times Y$ 上の未知のファジイ関係、 A, B はそれぞれ X, Y 上のファジイ集合、 Q は $W \times X$ 上のファジイ関係、 T は $W \times Y$ 上のファジイ関係とし、 A, B, Q, T はすべて既知とします。

式(29)、(30)において、もし A, B, Q, T が任意に与えられる場合には、上式を満たすファジイ関係 R が存在しない場合もあります。 R が存在する場合には後述する@合成演算を用いることによって簡単に解を得ることができます。また、解が存在する場合にも、上式を満たす R は一般にただ一つではなく無数に存在します。それらすべての解を求めようとする方法も研究されていますが、ここではそれらの解を代表する解、すなわち、最大解を中心にその解法について述べることにします。

5.2 $A \circ R = B$ の最大解

式(29)または式(30)を満たす最大解とは、どの解 R に対しても

$$R \subset R^* \quad (31)$$

を満たす解 R^* を指します。すなわち、どの $(x, y) \in X \times Y$ に対しても

$$\mu_R(x, y) \leq \mu_{R^*}(x, y)$$

が成立することを意味しています。 $A \circ R = B$ に対する最大解は@合成演算によって以下のように簡単に求めることができます [8]。

$$R^* = A @ B \quad (32)$$

すなわち、

$$\mu_{R^*}(x, y) = \mu_A(x) \alpha \mu_B(y) \quad (33)$$

によって求めることができます。ただし、上式右辺の α 演算は次に示す演算規則を意味しています。

$$\begin{aligned} s \alpha t &= 1 \quad (\text{if } s \leq t) \\ &= t \quad (\text{if } s > t) \end{aligned} \quad (34)$$

α 演算は、たとえば、以下に示すような演算結果となります。

$$\begin{aligned} 0.2 \alpha 0.2 &= 1, & 0.2 \alpha 0.1 &= 0.1, \\ 1 \alpha 0.1 &= 0.1, & 0 \alpha 0 &= 1 \end{aligned}$$

一般に A, B が任意に与えられたときには、 $A \circ R = B$ を満たす R が存在するかどうか問題となります。この場合には、まず $A @ B$ というファジイ関係を求め、これが $A \circ (A @ B) = B$ を満たすかどうかをチェックすればよいのです。もし満たすならば解が存在したことになり、その最大解が $A @ B$ であるということになります。

5.3 $Q \circ R = T$ の解法

ファジイ関係 Q, R, T に関するファジイ関係方程式 $Q \circ R = T$ に対する解も、同様にして@合成演算によって得ることができます。この場合も Q と T が任意に与えられたときには、解が存在しないことがあります。解が存在する場合には、一般にはただ一つでなく無数に存在します。

$Q \circ R = T$ に対する最大解 R^* は@合成演算によって以下のように求めることができます [8]。

$$R^* = Q^{-1} @ T \quad (35)$$

ただし、この場合の@合成演算はファジイ関係同士の演算ですので式(33)とやや異なり以下のように定められます。

$$\begin{aligned} \mu_{R^*}(x, y) &= \bigwedge_{w \in W} (\mu_{Q^{-1}}(x, w) \alpha \mu_T(w, y)) \end{aligned} \quad (36)$$

5.4 ファジイ関係方程式の応用

5.4.1 ファジイ診断

ファジイ関係方程式 $A \circ R = B$ において、ファジイ関係 R とファジイ集合 B が既知でファジイ集合 A が未知の問題はファジイ関係方程式の逆問題と呼ばれており、ファジイ診断システムを作るときに直面する問題です。これに対する解法は

文献 [7] などに示されていますが、ここでは 5.3 で紹介した④合成演算を用いた簡単な解法を示します。

$A \circ R = B$ の逆問題は、たとえば、 A , B , R を以下のように取り扱えば、いわゆるファジィ診断の問題となります。

A: 故障原因の集合 X 上のファジィ集合 (ファジィ原因),

B: 症状の集合 Y 上のファジィ集合 (ファジィ症状),

R: 故障原因と症状との間の因果関係を示すファジィ関係 (ファジィ知識).

すなわち、ファジィ症状 B を観測することによりファジィ原因 A を推定する問題となります。

$A \circ R = B$ を満たすファジィ原因の最大解 A^* は、④合成演算によって以下のように求めることができます。

$$A^* = R \circ B \quad (37)$$

すなわち、上式は式 (36) より次のように計算されます。

$$\mu_{A^*}(x) = \bigwedge_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \alpha \mu_B(y)) \quad (38)$$

5.4.2 ファジィ同定

図 3 のファジィシステムにおいて、ファジィ関係 R が未知でファジィ入力 x とファジィ出力 y が観測されるとき、既知のファジィ入出力対

$$(x_k, y_k), \quad k=1, 2, \dots, K$$

によりファジィ関係 R を推定する問題はファジィ (入出力関係) システムの同定問題と呼ばれています [6]。すなわち、この問題は以下に示す連立したファジィ関係方程式を未知のファジィ関係 R について解く問題となります。

$$x_k \circ R = y_k, \quad k=1, 2, \dots, K \quad (39)$$

この問題に対する解 R^* は、5.2 で述べました④合成演算を用いると

$$R^* = \bigcap_{k=1}^K R_k^* \quad (40)$$

ただし、

$$R_k^* = x_k \circ y_k \quad (41)$$

のように簡単に求めることができます。

すなわち、 K 個の既知の入出力対 (x_k, y_k) のそれぞれを用いて $x_k \circ R = y_k$ を満たす最大解 R_k^* を式 (41) によって定め、これら K 個のファジィ関係の共通集合を式 (40) のように求めることによって一つの解 R^* を得ることができます。

一方、実際のあいまいなシステムを対象とした同定問題では、ファジィ入力 x とファジィ出力 y との間を $x \circ R = y$ によってモデル化し、この式を近似的に満たすファジィ関係 R を求めることになります。この場合には、観測されたファジィ入出力対 (x_k, y_k) , $k=1, 2, \dots, K$ に関して、式 (39) を満たす R が存在しない場合があります。これは、実世界のシステムのファジィ入力とファジィ出力との間が必ずしもファジィ関係の合成演算によって対応づけられているとは限らないからですが、この場合の解決策としては、式 (40)、式 (41) によって得られるファジィ関係 R^* をもって近似解とする方法が考えられます。あるいは、ファジィ入出力モデルとしてのファジィ関係方程式をもう少し複雑にして対象システムに対する記述可能性を高める方法 [9] も提案されていますがここでは省略します。

6. ファジィ関係の合成演算に関する諸性質

sup・min 合成演算などの演算はファジィ関係に特有のもので、それを含んだ関係式にはいくつかの固有な性質があります。それらのうち主要なものを関係式にまとめて以下に列挙しました。

$$A \circ (R_1 \cup R_2) = (A \circ R_1) \cup (A \circ R_2) \quad (42)$$

$$(R_1 \cup R_2) \circ B = (R_1 \circ B) \cup (R_2 \circ B) \quad (43)$$

$$A \circ (R_1 \cap R_2) \subset (A \circ R_1) \cap (A \circ R_2) \quad (44)$$

$$(R_1 \cap R_2) \circ B \subset (R_1 \circ B) \cap (R_2 \circ B) \quad (45)$$

$$R_1 \subset R_2 \rightarrow x \circ R_1 \subset x \circ R_2 \quad (46)$$

$$A \circ (A @ B) \subset B \quad (47)$$

$$A \circ R = B \rightarrow R \subset A @ B \quad (48)$$

ただし上式において、 A は集合 X 上のファジィ集合、 B は集合 Y 上のファジィ集合、 R_1, R_2 は $X \times Y$ 上のファジィ関係を表しています。

7. おわりに

本解説では、ファジィ関係の概念を述べると共に、ファジィ関係の合成演算とファジィ関係方程式を中心に説明しました。特に、クリスプ関係とファジィ関係の概念に関しては、それらが有する写像あるいは関数としての性質に重点を置いて説明したつもりです。また、ファジィ関係方程式の解法に力点を置いて説明した理由は、ファジィ関係をファジィシステムの記述方策の一つとして重視したかったからにほかなりません。

ファジィ関係については、他にも重要な方法論があります。たとえば、

- ①推論の合成則におけるファジィ関係の利用
- ②ファジィグラフ
- ③類似関係などのファジィ関係によるファジィクラスタリング。

特に、①の推論へのファジィ関係の応用は、本解説で述べたファジィ関係の合成演算とも密接に関連しており重要ですが、これについては他の解説書 [10, 11] を参照してください。

また、ファジィ関係の合成演算には、ここで述べた $\sup \cdot \min$ 合成演算以外にも、 $\inf \cdot \max$ ($\min \cdot \max$) 合成演算、 $\sup \cdot \text{product}$ 合成演算、あるいは t -norm による一般化された合成演算などいろいろな演算が考案されていますが、ここでは紙面の都合上割愛しました。

最後に、本解説文は、日本ファジィ学会主催の講習会「ファジィ理論の基礎」テキストにおいて著者が執筆を担当した「ファジィ関係の概念と方法」を加筆訂正して編集したものであること付記

します。

参考文献

- [1] 日本数学会編：数学辞典，第2版，岩波書店(1976)。
- [2] L.A.Zadeh：Fuzzy Sets, INFORMATION AND CONTROL, 8, 338/353(1965)。
- [3] L.A.Zadeh：The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I, INFORMATION SCIENCES, 8, 199/249(1975)。
- [4] L.A.Zadeh：The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-III, INFORMATION SCIENCES, 9, 43/80(1975)。
- [5] E.H.Mamdani：Application of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant, Proc.IEE, 121, 12, 1585/1588(1974)。
- [6] E.Czogala and W. Pedrycz：On Identification in Fuzzy Systems and its Application in Control Problems, FUZZY SETS AND SYSTEMS, 6, 73/83(1981)。
- [7] 塚本弥八郎，田代 勤：Fuzzy 逆問題の解法，計測自動制御学会論文集，15巻，1号，21/25(1979)。
- [8] E.Sanchez：Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations, INFORMATION AND CONTROL, 30, 38/48(1976)。
- [9] 大里有生，菅野道夫：あいまいなシステムのファジー同定，電気学会論文誌C，109巻c，5号，367/374(1989)。
- [10] 水本雅晴：ファジィ理論とその応用，サイエンス社(1988)。
- [11] 本多中二，大里有生：ファジィ工学入門，海文堂出版(1989)。

[問い合わせ先]

〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1
長岡技術科学大学
工学部 計画・経営系
大里 有生
☎：0258-46-6000(内)3122
☎：0258-46-6504

—— 著 者 紹 介

**大里 有生** (おおさと ありお)

長岡技術科学大学 工学部 計画・経営系

1976年 横浜国立大学 工学部 機械工学科卒業, 1981年 横浜国立大学 工学部 情報工学科助手, 1989年 長岡技術科学大学 工学部 計画・経営系助教授, 現在に至る。工学博士。この間, システム工学, 情報処理, ファジィ理論とその応用の研究に従事。著書「ファジィ工学入門」(海文堂, 共著), 日本ファジィ学会, 国際ファジィシステム学会, 電気学会, 計測自動制御学会等の各会員。