

ファジィ集合†

向殿 政男 *

1. 集合とその表現

あいまいなものをどのように表現するかというのは難しい問題です。そこで、まず、その前にあいまいでない“明確”なものの表現方法を振り返ってみましょう。明確であるということは、簡単に言えば、イエス、ノーでちゃんと答えられるということです。その典型は数学でしょう。数学での答は、合っているか合っていないかのいずれかです。そして、数学の基礎には“集合”という考え方があり、全ての数学は集合を基礎として再構築出来ると言われているくらいです。そこで、明確なものの代表として、数学で用いられている集合の表現方法を見てみましょう。

集合とは、ある条件にあったものの集まりのことです。集合を定義するためには、まず、全体集合と呼ばれる、議論をする対象の領域を考えなければなりません。例えば、私の友人のうち、“学生”の集合を考えてみます。このときの全体集合は、“私の友人”です。今、例えば、鈴木、森、山崎、宇佐美、桑原、田中の6人しか私の友人はいなかったとします。“学生”という条件に合った人は鈴木、森、宇佐美の3人だったとします。この時、この集合を A と置くと、これは、

$$A = \{\text{鈴木, 森, 宇佐美}\}$$

のように中カッコでくくって表現されます。全体集合も、集合の特殊な場合と考えて、これを U と置くと、

$$U = \{\text{鈴木, 森, 山崎, 宇佐美, 桑原, 田中}\}$$

と書けます。こうすると、私の友人の各々は、“学生”という集合 A に所属するか所属しないかは、イエス、ノーで明確に答えられます。これは、図を用いて、図1のように集合を曲線で囲って表現することもあります。ここで、集合を定義することと、条件を明確にすることとは同じであることに注意して下さい。

それでは、このアイデアを使って、明確でない例として、“ダンディーな人”という集合を考えてみましょう。これは、あいまいで図1のように曲線で囲って明確に表現するのは難しそうです。度合いがあるからです。そこで、図2のようにダンディーと思われる人は大きく、そうでない人はそれに小く書くという表現方法を用いたとします。気分としては良く分かりますが、これを理論の研究対象としたり、コンピュータで取り扱おうとすると、このままでは不都合なのです。あいまいなものも、数量的に明確に表現しない限り取り扱いができないからです。

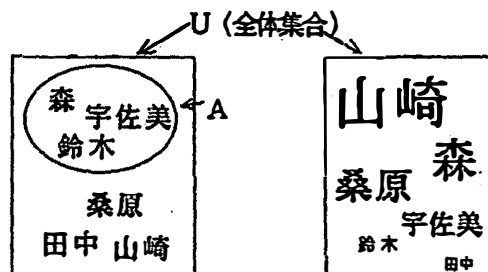


図1 “学生”の集合 A

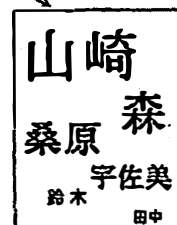


図2 “ダンディーな人”の集合

† Introduction to fuzzy sets
Masao MUKAIDONO

* 明治大学 理工学部 情報科学科
Department of Computer Science, Meiji University

2. ファジィ集合とその表現

あいまいなものの表現を、集合の考え方を利用して何とかしようとするためには、集合を図1のように表現するのではなくて、もう一つの図3のような、特性関数を用いて表現するという考え方をういたらどうでしょう。すなわち、集合 A はその特性関数と呼ばれる、全体集合 U の各要素に対して0または1を割り当てる関数 λ_A によって表現することができます。全体集合のある要素 a が、集合 A に所属している時には

$$\lambda_A(a) = 1$$

所属していないときには

$$\lambda_A(a) = 0$$

と表現します。この特性関数 λ_A は、

$$\lambda_A : U \rightarrow \{0,1\}$$

と表現されることがあります。

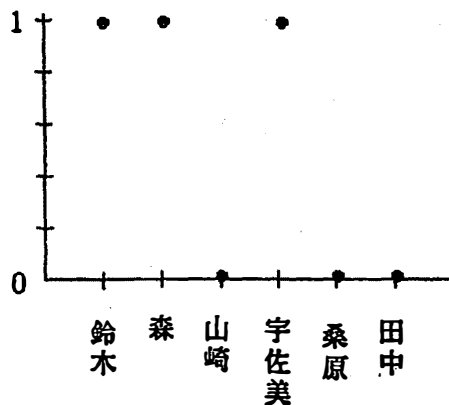


図3 “学生”の特性関数 λ_A

‘ダンディーな人’のようにあいまいな集合の場合には、この所属の度合いを1と0のみではなくて、その度合いに応じて0と1との間の一つの数値として表現するというアイデアを用いれば可能になります。完全に属している時には1、完全に属していない時には0とし、属している度合いに応じて中間の値を与えようというものです。このように拡張された集合を、従来の集合に対して、ファジィ(fuzzy)集合と呼ぶのです。ファジィとはあいまいという意味です。これに対して、“学生”の集合のように、所属するか否かがイエス、ノーで

明確に答えられるような従来の集合を **クリस्प (Crisp) 集合** と呼びます。クリस्पとはパリパリとしたという意味です。

それでは、前述の“ダンディーな人”の集合(これを記号 B で表すことにします)をこのアイデアで表現してみましょう。例えば、図4のようになります。

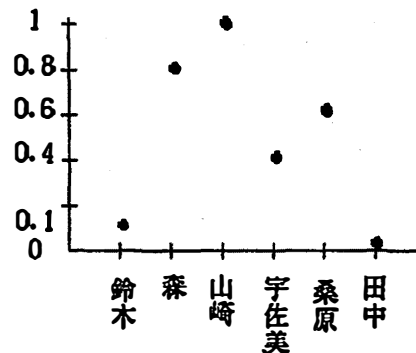


図4 “ダンディーな人”のメンバシップ関数 μ_B

山崎さんは明らかにダンディーで、所属度1ですが、田中さんは全くダンディーとはいえないので、所属度は0になっています。鈴木、森、宇佐美及び桑原さんはその中間で、ダンディーである度合いがそれぞれ、0.1、0.8、0.4及び0.6であることを表しています。この所属度を表す関数を、クリस्प集合の特性関数に対して、ファジィ集合では **メンバシップ関数** と呼びます。メンバシップ関数は、ある要素 a がそのファジィ集合 B に所属している(メンバーである)度合い(これが所属度です)を表している関数で、この所属度は $\mu_B(a)$ と記されます。上の例でいえば、

$$\mu_B(\text{鈴木}) = 0.1$$

$$\mu_B(\text{森}) = 0.8$$

などとなります。一般に、ファジィ集合のメンバシップ関数は

$$\mu_B : U \rightarrow [0,1]$$

と表現されます。クリस्प集合が中カッコを用いて表現されたのと同様に、ファジィ集合でも同じような表現方法が実は可能です。例えば、上の例でいえば

$$B = \{0.1/\text{鈴木}, 0.8/\text{森}, 1/\text{山崎}, \\ 0.4/\text{宇佐美}, 0.6/\text{桑原}\}$$

のようにファジィ集合を表すのです。但し、所属度が0のものは通常省略することになっています。ですから、上の例では、0/鈴木は出て来ていません。この表現方法は、一般には $B = \{\mu_B(a_i)/a_i\}$ と表されることがあります。なお、上の表現方法は

$$B = 0.1/\text{鈴木} + 0.8/\text{森} + 1/\text{山崎} \\ + 0.4/\text{宇佐美} + 0.6/\text{桑原}$$

のように表現されることもあります。この場合の記号 + は、通常の加算を表しているのではなく、ただ単なる区切り符号のようなものです。

3. ファジィ集合の例

もう一つファジィ集合の例を挙げましょう。これまでの例は、全体集合が有限の場合のものでした。そして、全体集合の要素同士の間には何の関係もありませんでした。今度は全体集合が連続の数値で表される場合について考えてみます。全体集合として数値を用いるということは、全体集合の要素間には大小関係という関係が自然に入ってくるということに注意してください。なお、ファジィ集合が定義されている全体集合自身は、常にクリスプ集合であるということも注意しておく必要があります。今、“中年”と“熟年”という集合を考えてみましょう。この場合の全体集合は、数値で表現された年齢の集まりとするのが適当でしょう。さて、中年や熟年が何才で始まって何才で終わるかは明確に定義できそうにありません。しかし、まず、これを従来のクリスプ集合として無理して表してみます。そのためには適当に定義しなければなりませんので、一応、中年は35才で始まって55才で終わり、熟年は50才で始まり70才で終わるとします。これを特性関数の図で書くと図5のようになります。さて、この定義は少しひどすぎませんか。34才は中年でなかったものが、一つ歳をとると突然中年になってしまいます。もっとひどいことを言うと、35才の誕生日の一日

前までは中年でなかったものが、一日たつと中年になってしまいます。これは、私達が使っている中年という言葉の意味を考えてみるといかにも不自然です。このことはクリスプ集合で定義する限り避けることはできません。そこで、これをファジィ集合として表すと例えば図6のようになります。年と共に連続的に所属度が変わるので、クリスプ集合のように一晩寝ると途端に中年の仲間入りをしてしまうという不自然さはなくなります。このようにクリスプ集合のイエス(1)、ノー(0)との境界をぼやかしてあいまいにしたというのがファジィ集合の名称の起こりです。元来、“中年”という言葉の意味には、そんな厳密で明確な定義はなかったはずで、図5の定義は便宜上と考えるべきです。どっちみち便宜上の定義ならば、もう少し自然な定義は出来ないものだろうかというのがファジィ集合の考え方の根本的な動機です。ファジィ集合は、特殊な場合としてクリスプ集合を含んでいますのでクリスプ集合の拡張概念と言うことができます。

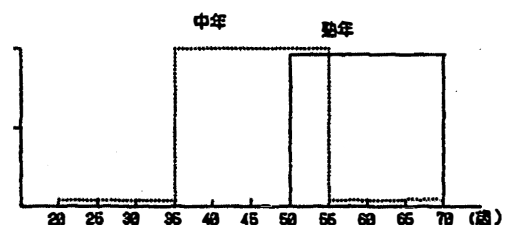


図5 “中年”と“熟年”のクリスプ集合

所属の度合いを認めるというファジィ集合の考え方は極めて素朴なもので誰でも考えつきそうなアイデアです。ファジィ理論はこの素朴な考え方を基本として築き上げられています。なお、ファジィ理論では、ファジィ集合の名前(上の例で言えば中年とか熟年)と、ファジィ集合のメンバーシップ関数(上の例で言えば図6の曲線)とを意識的に分けて使用します。ファジィ集合の名前はラベルと呼ばれることがあります。ファジィ集合はそのラベルとメンバーシップ関数との混合物なのです。

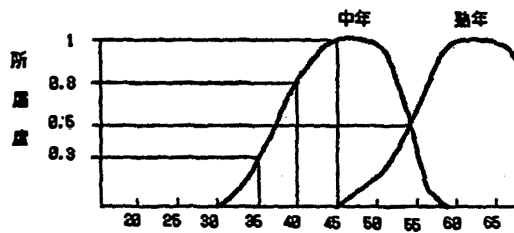


図6 “中年”と“熟年”のファジィ集合

4. ファジィ集合は精密集合か

ファジィ集合の簡単な例を紹介してきましたが、すぐ気が付く幾つかの疑問点があります。それは、まず、ファジィ集合のメンバーシップ関数は、誰がどのように決めるかということです。この答は簡単で、そのファジィ集合のラベルを用いた人が、主観的に、勝手に決めて良いということです。メンバーシップ関数を客観的に決められる場合にはもちろんそれに越したことはありませんが、“ダンディーな人”とか“中年”の定義のように客観的に決める根拠がない時には、主観的に決めて良いということです。客観的に決める方法がない以上、理論にはなり得ないと反論される方もあるかもしれませんが、逆にここにファジィ理論の面白さがあるのです。これは、あいまいさの存在を初めから認めてしまっているのです。これまでの理論の発想には、例えば確率論の分布関数のように、その数値を決める数学的原理や物理的原理があり、その原理に従って、数値は厳密に、客観的に導かれるべきであるという信念がありました。これが可能な場合にはもちろんそうすべきですが、客観的に決める根拠がない場合でも理論として取り扱おうというのが、ファジィ理論の精神なのです。この場合には、数値は主観的に勝手に決めて良いというところに、ファジィ理論が取り扱っているあいまいさの本質があるように思えます。例えば、“中年”という言葉も、使う年代や、同じ年代でも個人によってその意味内容は異なっていると思います。その言葉を使った人が、その人の気持ちに従って自由にメンバーシップ関数を描いてもらうこ

とにより、その人の主観や好みなどを表現することが可能になります。ただし、いったんメンバーシップ関数を決めてしまえば、それは客観的なものであるのです。これ以後の取り扱い、従来の理論とまったく同じです。

次に、所属度として0と1との中間の値を使うということは、確率論と同じではないか、ファジィ理論で取り扱うことは確率論ですべて取り扱えるのではないかという疑問があります。これは、取り扱っているあいまいさが違うということで答えることができます。確率論で取り扱っているあいまいさは、前回紹介したようにランダムネスと呼ばれる生起に関するあいまいさで、起きてしまえば、イエス(1)かノー(0)かで答えられるものを対象としています。あなたが“中年である確率”を考えようということは、本来、人間は中年であるか中年でないかのいずれかであるという前提に基づいています。しかしファジィ理論は、“中年”という言葉の意味に含まれている境界のあいまいさであるファジィネスを対象としているのです。

もう一つ、ファジィ理論は本当にあいまいさを取り扱っているのだろうか、すなわち、メンバーシップ関数が決まるということは、あいまいさはないのではないか、第一、従来のクリスプ集合が0と1のみで近似していたものを、もっと精度良く精密に決めているのであって、ファジィ(あいまい)集合どころか厳密集合とか精密集合と呼ぶべきではないかという疑問について考えてみます。これはメンバーシップ関数を主観的に決めて良いというところで述べたように、ファジィ集合で取り扱っているあいまいさは、メンバーシップ関数を自由に決めてよいというところにあります。決めてしまえば、それ自身は明確で客観的なもので決してあいまいさは存在しません。それだからこそ、従来の2値論理に基づいて設計、開発されたデジタルコンピュータでファジィ集合は表せシミュレーションできるのです。第一、それだからこそ理論の対象となるのです。

ファジィ理論では研究対象に存在するあいまいさを初めから認めているということは、もし客観

的に厳密に決める根拠がない時には、または厳密に決める必要がなく大雑把で良い時には、メンバーシップ関数を主観に従って自由に決めて良いということであって、メンバーシップ関数の数値を一つ決めたからといって、研究対象のあいまいさがなくなった訳ではありません。

5. ファジィ集合の役の立ち方

ファジィ集合が、所属の度合いとして、0と1との中間の値をとることを許したということにより、第3章で述べたように、条件が少し異なっただけで(1歳年をとっただけで)結果がまったく異なる(中年でなかったものが中年になってしまう)という不都合がなくなりました。これにより、私達の感覚により近い表現が可能となりました。また、イエス(1)、ノー(0)だけで答えなければならない場合に比べて、途中の度合いを認めるということにより気楽に柔軟に自分の気持ちなどを表現することができるようになったと思います。また、メンバーシップ関数の定義に主観による違いを認めるということ、好みなどの個性を自由に表現することができるという利点もあります。更に、ファジィ集合を用いると、次のようなことも可能になります。例えば、中年という概念と熟年という概念とがどのくらいの度合いで一致しているかを見るのに、ファジィ集合の一致度という考え方が使われます。中年と熟年という言葉に記号としてだけ見ていたのでは、“年”という記号が一致していることがわかるだけで、概念の近さの度合いについては何も導けません。その言葉の意味を考えなければ、どれほど一致した概念かはわからないからです。

ファジィ集合では、二つの概念の一致度は、二つのメンバーシップ関数の共通部分の一番大きな数値を以って表すとしています。図6を見てください。中年と熟年のメンバーシップ関数の共通部分のうち、一番大きな値は、図から0.5となります。すなわち、中年という概念と熟年という概念の一致度は、0.5というわけです。このように一致度の求め方は極めて簡単です。

ファジィ集合がメンバーシップ関数を用いて表現されるということにより、多くのメリットが生じました。ファジィ集合の考え方を基本としているファジィ理論が、多くの実際の場面で有効であることが実証されつつあります。その理由には色々あると思われますが、以上のことに加えて次のようなこともその一つと考えられます。すなわち、私達が日常使っている言葉には、言葉の記号とそれが表している意味との二面性があります。そこで、たとえば、中年という記号としての言葉をファジィ集合のラベルに、そしてその意味をメンバーシップ関数に対応させれば、ファジィ集合は日常用いている言葉の一つのモデルになっていると考えられないでしょうか。こう考えれば、図6のメンバーシップ関数をコンピュータに取り扱わせるということは、コンピュータに極めて簡単ではありますが、意味の処理を実行させていることに相当することにはならないでしょうか。ただし、コンピュータ上に表現されたメンバーシップ関数は、あくまでも形式的に表現された確定的なものです。すなわち、ファジィ集合を用いれば、コンピュータに極めて単純な形ではあるが、ある意味で、意味を形式的に取り扱わせていることができるのです。このように考える時、ファジィ理論がなぜ役に立つのかという理由と、その面白さと特徴の一端が明らかになると思います。ファジィ理論は、ファジィ集合という考え方により、記号のみを扱う厳密なコンピュータの論理と言葉の意味を扱うあいまいな人間の論理との橋渡しをしてくれる、数少ない理論のように思います。この観点からも、ファジィ理論は、言葉で表された人間の知識をファジィ集合を用いてコンピュータに取り扱わせると言ったことを通じて、ヒューマンコミュニケーションなどの場面でも重要な理論になるのではないかと考えられます。

(1990年10月13日 受付)

[問い合わせ先]
〒214 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1
明治大学 理工学部情報科学科
向殿 政男
☎：044-911-8181(内線)316,314
☎：044-900-5196