

不確かな数-ファジィ数[†]

市橋 秀友 *

1. はじめに

ファジィ数とは実数のファジィ部分集合のことであるので、ファジィ集合と何ら変わるところはありません。むしろ、足し算や掛け算などの演算や、関数、写像などを考えやすいので、その意味ではファジィ集合よりもファジィ数に限定した方が分かりやすいともいえます。たとえば一次元の実数 R^1 を考え、ファジィ数をクリスプにすると区間になります。単なる区間、すなわち範囲でなく、その値の生起する度合までも考えると R^1 上の確率分布、すなわち確率変数です。確率変数とファジィ数はどう違うのだろうか？ファジィ数は確率変数で表せるのではないだろうか？このような疑問は誰もが抱くものです。著者も常にそういった疑問(というよりはファジィしか専門領域を持たない私には心配といった方がよい)を持ちながら9年間程、後塵を拝しながらファジィ理論の応用研究をやってきました。東京工大の菅野教授が始められたファジィ測度論[1]は、この疑問に対決する一つの理論ではありますが、確率論の研究者を説き伏せるまでには到っていないように思えます。その理由は、ファジィ測度論がファジィ測度の「公理」を基に作られたもので、「公理」には、それを信用するもしないもあなた任せの所があるからではないでしょうか。ファジィ測度論だけでなく数学的な理論にはこのような傾向がよくあります。そこで、やはり「ファジィ」の意味から説

きあかす必要があると考えられていて、人文科学的研究[2,3]も必要となります。両者の中間的なものとして不確かさの測度(uncertainty measure)の研究があります。まず「不確かさ」の意味を考え、その度合を表現する適当な指標を提案するのが、この研究です。これに成功するとファジィ理論は伝統的確率論から市民権を与えてもらえるかもしれない、という期待が持てるのですが、今なおファジィ論者の悪戦苦闘は続いています[4]。実は、この原稿を書き出した前日に文献[4]の著者 G.J.Klir(クリアーと読むそうで、名前はファジィでない)教授が大阪に来られたので講演していただきました。遅まきながら以前から言っておられることがよく分かったような気がしますので、忘れないうちに整理しておこうと机に向かっています。本講ではこのような背景から最近のファジィ理論研究の一端を述べさせて頂き最後にファジィ数の演算がどうあるべきかを結論づけることができれば幸せであります。読者諸賢のご叱正を期待しながら(恐れながら)書いてみたいと思います。

2. ファジィ数の意味と表現

ファジィ理論の範疇に含まれるのですが、よくでてくるものに可能性理論と呼ばれているものがあります。ファジィ集合の意味を解釈するにあたって Zadeh によって考えられたもので[5]、ファジィ集合は、ある変数(必ずしも実数値の変数とは限りませんが)のとり可能な値(possible value)の集合であるとしたものです。ですからメンバーシップ関数は可能性のウェイト(possibility weight)の分布を表していると考えられています。たとえ

[†] Fuzzy Numbers Are Uncertain Numbers
Hidetomo ICHIHASHI

* 大阪府立大学 工学部 経営工学科
Department of Industrial Engineering, University of
Osaka Prefecture

ば、「靖子さんは朝食に何個の卵を食べられるか?」というのと「靖子さんは朝食に何個の卵を食べるか?」という2つの文を比較してみると違いがあります。前者を扱うのが可能性であり、後者が確率です。確率を推定するには度数分布を用いるのがわかりやすいのですが、ここでは、靖子さんの家族や友人に、靖子さんが何個食べるかをアンケート調査するとします。少ししか食べないとか、たくさん食べるとかファジィ数で答えてもらえばいいのですが、複雑になるので範囲(区間)で答えてもらおうとします(ただし、本稿を最後まで読んで頂くと、家族や友人が各々、自分自身にもアンケート調査すれば、ファジィ数で答えることになるのを推察頂けると思います)。そうすると図1のような非負の整数値の上での頻度分布が得られます。図1は通常の度数分布とは違って

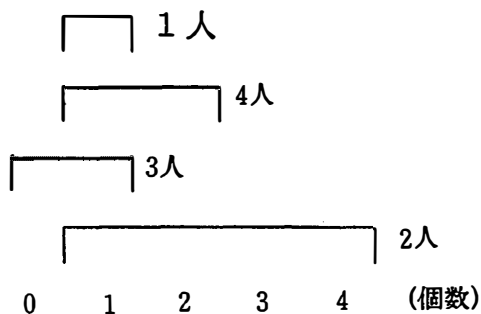


図1 アンケート「靖子さんは何個の卵を食べるか」の度数分布

それは区間値の回答を集計したからです。正確に何個であるというように答えてもらえば通常の度数分布が得られ、基準化して相対度数を求めれば確率分布らしきものが求められます。しかし正確に答えることが本当に正確なのでしょうか? 「えいやっ」と決めることに合理性があるのでしょうか? 区間で答える方が正直ではないでしょうか。このようにして得られた区間の度数分布から、今度は「靖子さんは何個食べられるか」を表す分布を作ってみます。それには

$$\mu(x) = \sum_{x \in A_i} m(A_i) \quad (1)$$

と計算します。ここで変数 x は卵の個数でたとえ

ば3個と指定します。 A_i は10人のうちの第 i さんの回答(区間)です。また $m(A_i)$ は相対度数で、たとえば図1の例で相対度数 $m(\{1\text{個}, 2\text{個}\}) = 4\text{人}/10\text{人} = 0.4$ です。ですから、 $\mu(1\text{個}) = 1.0$, $\mu(2\text{個}) = 0.6$, $\mu(4\text{個}) = 0.2$ などと求められます。4個食べる確率が0.2あるのではなく、4個食べる可能性が0.2あることを表していることは(1)式をよく見るとわかります。「靖子さんは何個食べられるか?」と書きましたが、可能性とは大食い競争の意味で何個ではなく、もう少し自然な意味での何個食べられるかを表しています。(1)式は整数のファジィ部分集合すなわちファジィ数のメンバシップ関数に他なりません。メンバシップ関数がある変数のとりうる値の可能性のウェイト(possibility weight)の分布を表しているということが理解できます。ここで x は1個とか2個とかいった1つの値を表す変数ですが、これを $\{1, 2\}$ とか $\{2, 3, 4\}$ といった集合(実数の場合は区間を考えてもよい)にするとどうなるでしょうか。確率の場合はいとも簡単に集合 B の確率を、要素の確率から

$$P(B) = \sum_{x \in B} P(\{x\})$$

と計算できます。ただし $P(\{x\})$ は x の確率です。このように変数 x の関数でなく、集合 B の関数として表される関数を集合関数といいます。図1の場合の集合関数は

$$Pl(B) = \sum_{B \cap A_i \neq \emptyset} m(A_i) \quad (2)$$

と書かれ、プローザビリティ(plausibility)と呼ばれています。 B として、たとえば卵を「2個か3個」とすると $Pl(B) = (4+2)/10 = 0.6$ となり、2個かまたは3個食べる可能性を表しています。また(1)式は

$$\mu(x) = Pl(\{x\})$$

として、1つの要素だけについてプローザビリティを求めたものであるといえます。ですから Pl から μ 、すなわちメンバシップ関数を求めることはできるのですが逆はできません。 $\mu(x)$ を(1)式

や $Pl(\{x\})$ の意味で解釈すると、集合 A_i が大きくなるほど、つまり、卵の個数について不確かな回答者が多い程、 $\mu(x)$ は大きくなります。 $\mu(x)$ は、このような不確かさを表す指標となっているのです。ところで、 μ は集合関数ではありません、Zadeh [5] は μ を集合関数にするために可能性測度

$$\Pi(B) = \sup_{x \in B} \mu(x) \quad (3)$$

を定義しました。確率は確率測度と呼ばれますが、一般に数学での測度は集合関数として表されます。そこで可能性も集合関数で表して、可能性測度と呼ばれています。(3)式から

$$\begin{aligned} \Pi(A \cup B) &= \max [\Pi(A), \Pi(B)] \\ \mu(x) &= \Pi(\{x\}) \end{aligned}$$

であることは明らかです。

先程、 μ から Pl を求めることはできないと書きましたが、 μ から作られた(3)式の $\Pi(B)$ と等しい Pl は存在します。メンバシップ関数が最初から与えられているとして話を進めるときには、この $\Pi(B)$ に等しい(2)式のプローザビリティを暗に仮定しているといつて良いと考えられます。

以上述べてきましたように、ファジ数(またはファジ集合)と、 Pl の一つである可能性測度とが対応しているのですが、このような対応はファジ集合演算に矛盾しないかどうかの検証が必要になってきます。すなわち本リレー講座の前の中島信之先生が解説された内容との一貫性があるのかどうかです。このような一貫性を示す研究が最近のファジ理論研究の進歩 [6] であるのですが、少々長くなるので省略させていただきます。しかし、ファジ集合・ファジ数と確率とのつながりが明らかにされてきていて、それは「すべてが確率のみで扱える」といった批判を肯定するのではなく、異なる観点から「ファジ集合は確率の規則に矛盾しない」ことを明らかにしてきています。ただそのような理論が最初からあったのではなく、後から出てきているところにファジ理論が多くの批判を受けてきた歴史を見ることができ

るように思えます。

3. 不確かさの指標

不確かさを Klir [4] に従って分類すると

- 1) vagueness --- 境界の不確かさを意味している。数値の場合はその長いファジ数ほど不確かで、クリスプな区間にはない不確かさ。
- 2) ambiguity -- 一対多の対応関係において、複数の要素のうちどれを指すのかが明らかでないこと。数値の場合は区間も一例である。その原因としては、ignorance(無知)と conflict(矛盾)の2つがあげられる。

となります。

2番目の不確かさ、ambiguity をさらに詳しくみると、まず nonspecificity(不特定性)があります。これは集合(数値の場合は区間)として指定されているがその中のどの要素を指しているかが不明なことで、その集合に含まれる要素の数が多いほど、不確かさも大きくなります。有限集合 A の不確かさは Hartley 測度

$$I(A) = \log_2 |A| \quad (4)$$

によって表すことができます。ただし $|A|$ は濃度すなわち要素の数です。nonspecificity $I(A)$ はまた ignorance(無知)を表現しています。そのわけは後に例をあげて述べます。

もう1つは, dissonance(不一致性)です。これはある要素が真のものであると確信することと他のある要素を確信することの不一致さ、すなわち conflict(矛盾)によって真のものが特定できない不確かさを意味しています。このような不確かさは確率 P を用いて Shannon エントロピー

$$H(P(x) \mid x \in X) = - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \quad (5)$$

と表すことができます。

ambiguity の2つの不確かさを説明するために次のような例を考えましょう。薄暗い実験室で3つの数値①, ⑦, ⑨のどれかが複数の被験者に見せられ、被験者は3つの整数のどれに見えたかを答えます。この実験を行う前に被験者に尋ねても

当然全員がわからないと答えるでしょう。つまり、①、⑦、⑨のうちのどれかであることは分かっているが、どれであるかはまったく分からない。このような不確かさは nonspecificity です。一方、暗い実験室で行ったために被験者の 1/3 ずつがそれぞれ①、⑦、⑨であると答えたとします。この場合も正解はどれであるか、まったく不明確です。すなわち被験者の意見がまったく矛盾しているために①、⑦、⑨のどれであるかが分からないのです。1/3 の等確率は完全な矛盾を意味しています。ですから Shannon エントロピーは意見の矛盾の程度を表していると考えられます。通常、前者の nonspecificity も等確率の分布を仮定することによって確率でその不確かさが表現されています。統計的決定理論でのベイズ確率もしばしばこのような目的で使われています。これでは、実験の前であるのか、実験後で何らかのデータを得ているのかの区別がつけられません。2つの不確かさがあるので、その表現方法も違っていきしかるべきではないでしょうか。しかし、どちらの例も正解がまったく不明確であることには違いありません。だから等確率であると考えのと同じではないかともいえるのですが、等確率であるということが分かっているのと、それすら分からないのとでは無知の程度に差があります。たとえば、自分は美人の久美子嬢の二人のボーイフレンドの一人であることには確たる自身が持てるのだが、自分と結婚する気があるのかないかまったく分からない、というのと、久美子嬢に「二人ともいい人なので、どちらにしようか決めかねています」と言ってもらったのでは情報として大きな差があると思いませんか？前者の場合は、楽観的な人なら、もう自分のものだ決めてかかるでしょうし、悲観的な人なら、諦めてしまうでしょう。ところが後者の場合には、どちらのタイプの人でも、もうひと押しだと努力することになります。

以上に述べた例は完全な無知、または完全な矛盾の場合です。それでは、もう少し一般的な場合はどうなるでしょう。再び靖子さんの食べる卵の例に戻ります。図 1 のような場合の non-

specificity は(4)式の Hartley 測度の重み付き平均

$$N(m) = \sum_{A \in X} m(A) \log_2 |A|$$

として計算されます。

ところで、アンケート結果が図 1 のような区間としてではなく全員が、整数値で答えている場合も当然ありえます。すなわち確率分布となっているのですが、このときすべて $|A| = 1$ ですので $N(m) = 0$ となります。ですからどのような確率分布も nonspecificity は 0 であって、確率では無知を表すことはできません。一方 conflict (矛盾) を表す指標として(5)式の Shannon エントロピーを一般化した

$$D(m) = - \sum_{A \in X} m(A) \log_2 \sum_{B \in X} m(B) \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

が最近 Klir と Ramer によって提案されています [7]。 $D(m)$ は確率の一様分布のときに最大値をとります。

このように靖子さんが食べる卵のファジィ数には、無知と矛盾という 2 種類の不確かさがあり、2つの尺度で表す必要がでてきました。2次元のベクトルとして表すのは不便なので2つを足してしまつて

$$T(m) = N(m) + D(m)$$

とするような提案もされています [7]。しかし、このように足してしまつていいものかは疑問もあります。つまり $T(m)$ という尺度が $N(m)$ と $D(m)$ に分解可能であるかどうかです。そこで、 $m(A)$ を集合 A 内の各要素に分配したときの Shannon エントロピーの最大値を $T(m)$ とするものが提案されています [8]。また、

$$m(A) \leq \sum_{x \in A} P(x)$$

がすべての集合 A_i について成立ち、かつ Shannon エントロピーを最大にするような確率 $P(x)$ を求め、そして全体の不確かさを

$$T(m) = - \sum_{x \in X} P(\{x\}) \log_2 P(x) \quad (6)$$

とするようなものも提案されています[9]。(6)式の $Pl(\{x\})$ は 2 章で述べたように $\mu(x)$ に等しく、集合 A_i が大きくなる程大きくなります。その意味で(6)式は無知量も表しているのです。蛇足ですが、この $T(m)$ の特長をあげると、① ランダム集合の包含関係 [10] を順序づける。② 完全無知な状態にのみ最大となる。③ 確率分布に等しいときは Shannon エントロピーに一致する。となり、完全無知が完全矛盾よりも不確かであることを表せます。ただ(6)式が決定版であるかどうかは不確かで、研究の余地のある分野ではないかと思えます。

以上で 2 つ目の不確かさ ambiguity については終わり、最初の不確かさ, vagueness について述べてみたいと思います。これはファジネスの元祖のようなもので、ファジ集合そのものなので説明するまでもないよう考えられますが、はたして「無知」や「矛盾」といった、不確かさの原因をどう考えると良いのでしょうか？ここにも ambiguity のときと同じ矛盾があるように思えます。しかし本質的な違いもあります。もう一度例をあげますが、レストランで出てきたコップの水の温度を考えてみます。真の水温はただ 1 つであり、水温を推定するときの不確かさは無知と矛盾の 2 つからなる ambiguity です。次に「水が液体である温度」を考えるとそれは 0°C から 100°C までのすべての水温が正解です。 0°C から 100°C とは実数の区間です。この区間には無知も矛盾も存在しません。このような意味での単一の区間には不確かさは存在しないのです。しかし、ここで図 1 と同様にアンケート調査を行ったとします。ただし、チベットや南米の高地に住む人々にも参加していただきます。すると(1)式を用いてメンバシップ関数が求められます。ここで注意すべきことは無知はまったくないということです。あるのは意見の違い、すなわち矛盾だけです。ですから、vagueness におけるメンバシップ関数の解釈は ambiguity のそれとは異なっています。

以上、Klir 教授による不確かさについて私なりの解釈をしました。これをまとめると、「すべての不確かさはアンケート調査によって数量化でき

る」。または、「ファジ数とはアンケート調査の結果である」となりました。勿論、実際にアンケートするかどうかは別のことで、メンバシップ関数の背後に暗にそのようなアンケートを考えているのではないかということです。また、必ずしも他人に行うアンケートのみではなく、自分自身のアンケート調査である場合もあります。この辺は、私の偏見に基づく意見でありまして、賛成して頂けるかどうかは読者次第です。ただ、このように考えると、効用理論における価値関数とファジ理論のメンバシップ関数との違いも明らかになると思えます。

4. 測度は写像によって運ばれる

確率変数の関数とは確率変数をなんらかの関数で写像することで、確率変数の足し算や掛け算も写像の一つです。いま確率変数 x_1 の例としてサイコロの目を考えてみます。

$$y_1 = f(x_1) = (x_1)^2$$

という関数(写像)を用いると、 y は整数の集合 $\{1, 4, 9, \dots, 36\}$ のうちの 1 つの値をとります。そして各々の生起する確率は $1/6$ です。つまり、さいころを投げて、出た目の 2 乗がこの集合の中のどれになるかは $1/6$ の確率で決まります。確率は右辺から左辺へそのまま運ばれています。次に 2 つのサイコロを投げ、各々の出る目を確率変数 x_1, x_2 としたとき

$$y_2 = h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

つまり、2 つの目の和はどのような確率で生起するかを考えます。たとえば、 $y_2 = 2$ となるのは $x_1 = 1$ で $x_2 = 1$ のときだけですから確率は $(1/6) \times (1/6) = 1/36$ です。また $y_2 = 6$ となるのは、 $(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)$ の 5 通りありますから $(1/6) \times (1/6) \times 5$ となります。中学校の数学を持ち出して申し訳ありませんが、これは基本的なことで重要だと思うのです。 y_1 や y_2 の生起する確率測度が、右辺から左辺へ関数 f や h によって運ばれているというように理解すると、確

率測度以外の測度も同様に運ぶことができるはずだと考えられるからです。確率測度を(3)式の可能性測度 Π に変えてみると、 y_1 については確率のときと同様ですので $\Pi(\{y_1\})=\Pi(\{x_1\})$ となります。メンバシップ関数 μ を用いて書くと

$$\mu_Y(y_1)=\mu_X(x_1) \quad (7)$$

と同じことです。 y_2 については少し問題があります。確率の場合は $x_1=2$ で、かつ $x_2=4$ のときはそれぞれの確率の積で計算されます(x_1 と x_2 は独立)。数学用語では直積といいますが、その確率は積であります。「(2,4)または(1,5)」のような和事象の確率は和で求められますが、可能性は(3)式が使えるので $\max$ (大きい方)をとれば良いのはすぐに分かります。しかし、直積はどう計算すべきでしょうか。Zadehはこれを $\min$ (小さい方)で定義しました。クリスプ集合の直積が円筒拡張の共通集合であることから、確率の和に対して $\max$ となっていることから、積に対しては $\min$ を考えるのは当然の帰結とも思えます。Zadehはこのような計算の仕方を拡張原理と呼びました。しかし、本講ではメンバシップ関数 μ の背後にはアンケート結果があることを主張しています。(3)式ではなく(1)式で、しかも $m(A)$ を用いて計算するとどうなるでしょうか？

図1のようなアンケート結果を関数 $f: X \rightarrow Y$ で写像すると、 Y の部分集合 B_i は

$$B_i=f(A_i)$$

として普通の区間算で求められるので、 $m(B_i)=m(A_i)$ とすれば $\mu(y_1)$ は(1)式と同様に求められます。次に関数 h の場合は

$$C_i=h(A_j, B_k)$$

と、また区間算で Y の部分集合 C_i が定まります。図1の例で靖子さんだけでなく、りえさんの食べる卵のアンケート結果も考えると、2人が食べる卵の合計個数が、また図1のようなグラフになるわけです。ここで集合は別のものなので C_i を使っています。このとき各 C_i の相対度数 $m(C_i)$ は、相対度数の意味から考えて積で求める

のが自然です。また $C_i=C_j$ となる C_j があれば、足して1つの $m(C_i)$ にしてしまえばいいでしょう。このようにしておくと、アンケート結果が確率分布になっている場合でもおかしいことにはなりません。確率との整合性が良くなります。しかし欠点もあります。それは実際にこのようにしてファジィ数の演算を行うには極めて面倒な計算をしなければならないということです。Zadehの提唱した(3)式からくる $\max, \min$ 計算の方がずっと簡単に計算できます。普通の連続な実数のファジィ数の演算は α -カットによる区間算でできます。メンバシップ関数をだるま落としのように水平に輪切りにした区間を求め、その区間の足し算や掛け算などの演算だけですむのです。メンバシップ関数が三角型などの何らかの単峰形に統一されていれば、その中心と広がりの方の2つのパラメータだけの計算になってしまいます。このような簡便さは、理論上よりは、むしろ実用上重要であると思います。

ファジィ測度の内容に入っているのですが、あえて本講ではファジィ測度論には立ち入らずに進めました。上述のようにアンケート結果としてファジィ数を見るのは一つの解釈であり、ファジィ測度論には別の見方もあります。分解可能と言われるファジィ測度のあるクラスには確率測度との間に

$$P(A)=g(F(A))$$

と変換できるような関数 g (同型写像と呼ばれている)が存在するものがあります。ただし $F(A)$ は分解可能なファジィ測度で、 $g:[0,1] \rightarrow [0,+\infty)$ は、たとえば

$$g(x)=x^k$$

のような厳密増加関数です。可能性測度はこのような分解可能測度の極限($k \rightarrow \infty$)にあるものとも考えられます。このことからファジィ数はまがった確率(まちがった確率ではありません)の極限とする見方もできそうです。しかしああもいえる、こうもいえると説明するのは読者を矛盾の世界に

誘うことになると思います、本講ではアンケートからの説明のみにしました。

5. おわりに

編集委員会からファジ数について解説を書くように命じられたのですが、少し違った内容になっていると反省しています。しかし、ファジ数は応用も多く、種々の解説がすでに書かれていますので、ファジ数の意味する不確かさとファジ測度との関連に焦点をあて、私の偏見を交えながら解説させて頂きました。一般的なファジ数の解説や応用については、文献[11,12]を参照下さい。

最後に、Klir 教授の講演の OHP から老子の言葉を以下に紹介します。

知不知，尚矣

Knowing ignorance is strength.

不知知，病矣

Ignoring Knowledge is sickness.

紀元前 6 世紀の東洋思想家の名言を西洋人に教えられた私は「不知知，病矣」であります。

参 考 文 献

- [1] 菅野・室伏：ファジ測度論入門，日本ファジ学会誌，Vol.2～3(1990～1991)連載中
- [2] 菅野：ファジ理論の展開，第 5 章「言語と曖昧性」，サイエンス社 (1989)
- [3] 中村，他：ファジ-新しい知の展開，第 3 章「ファジ理論の目指すもの」，日刊工業新聞社 (1989)
- [4] Klir,G.J. : Is there more to uncertainty than some probability theorists might have us

believe?, International Journal of General Systems, 15, 347-378 (1989) (本誌前号の文献紹介を参照下さい)

- [5] Zadeh,L.A. : Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1, 3-28 (1978)
- [6] Dubois,D. and Prade,H. : Fuzzy sets, probability and measurement, European Journal of Operations Research, 40, 135-154 (1989)
- [7] Klir,G.J. and Ramer,A. : Uncertainty in the Dempster-Shafer theory-A critical re-examination, International Journal of General Systems, 18, 155-166 (1990)
- [8] 乾口・前川・久米：Dempster-Shafer 理論における巨視的な情報測度について，第34回システム制御情報学会研究発表講演会，9-10(1990)
- [9] 前田・市橋・乾口：日本経営工学会平成 2 年度秋季大会予稿集，213-214 (1990)
- [10] Dubois,D. and Prade,H. : A set-theoretic view of belief function-Logical operations and approximation by fuzzy sets, International Journal of General Systems, 12,193-226 (1986)
- [11] 田中：ファジモデリングとその応用，朝倉書店 (1990)
- [12] 寺野・浅居・菅野共編：ファジシステム入門，オーム社 (1987)

(1991年 3 月 5 日 受付)

[問い合わせ先]
〒591 堺市百舌鳥梅町4丁804
大阪府立大学 工学部経営工学科
市橋 秀友
☎：0722-52-1161
☎：0722-59-3340

著 者 紹 介



いちはし ひでとも
市橋 秀友

大阪府立大学 工学部経営工学科
1971年 大阪府立大学 工学部経営工学科卒業，同年松下電器産業(株)入社，'81年大阪府立大学 工学部経営工学科助手，'87年同講師，'89年同助教授，現在に至る。ファジ理論とその応用に関する研究に従事。工学博士，国際ファジシステム学会，日本経営工学会，システム制御情報学会などの会員。