

連載

ファジィ測度論入門 [III][†]

室伏 俊明* 菅野 道夫*

2.6 可能性測度と必然性測度

本節では, Zadeh [12] によって提案された可能性測度と, これに双対的な測度である必然性測度について概説する.

可能性 (possibility) と必然性 (necessity) は様相概念と呼ばれ, 論理学で古くから扱われている. 様相論理 (modal logic: 様相概念を取り入れた論理学, 例えば [50, 51] 参照) においては, 可能性は記号 $\Diamond$ または M で, 必然性は記号 $\Box$ または L で表される. これらは, それぞれ命題 A を修飾し, $\Diamond A$ は「 A は可能である」, $\Box A$ は「 A は必然である」を意味する. 否定を記号 $\sim$ で, 同値を記号 $\equiv$ で表すと, 様相論理では

$$\Diamond A \equiv \sim \Box \sim A, \quad (1)$$

$$\Box A \equiv \sim \Diamond \sim A \quad (2)$$

が成立する. すなわち「 A が可能とは, A でないことが必然でないこと」であり, 「 A が必然とは, A でないことが可能でないこと」である. また, 含意を記号 $\rightarrow$ で表すと,

$$\Box A \rightarrow A, \quad (3)$$

$$A \rightarrow \Diamond A, \quad (4)$$

すなわち「 A が必然ならば, A 」であり, 「 A ならば, A が可能」が成り立つ (ただし, 様相論理には様々な体系があり, (3), (4) 式が成立しない体系もある).

では, 可能性測度と可能性分布関数の定義から始めよう.

〔定義 2.6.1〕 Ω を空でない集合とする. Π が Ω 上の可能性測度 (possibility measure) であるとは,

$$\sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = 1 \quad (5)$$

を満たす関数 $\pi: \Omega \rightarrow [0, 1]$ が存在して,

$$\Pi(E) = \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in E\} \quad \forall E \subset \Omega \quad (6)$$

(ただし, $\sup \emptyset \triangleq 0$ とする)

となることをいう. 可能性測度 Π を与える関数 π を可能性分布関数 (possibility distribution function) という (図 1).

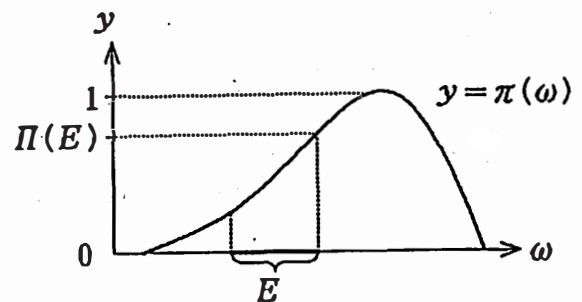


図1 可能性分布関数 π

(6) 式より明らかに,

$$\Pi(\emptyset) = 0, \quad \Pi(\Omega) = 1, \quad (7)$$

$$E \subset F \Rightarrow \Pi(E) \leq \Pi(F) \quad (8)$$

なので, 可能性測度はファジィ測度である.

なお, Zadeh [12] による定義では, 可能性分布関数 π に (5) 式の正規性条件は仮定されていない. したがって, その場合の可能性分布関数 $\pi: \Omega \rightarrow [0, 1]$ は, 一般のファジィ集合のメンバシップ関数と見なせる. 唯一ここにおいてファジィ測度と

[†] An Introduction to Fuzzy Measure Theory
Toshiaki MUROFUSHI and Michio SUGENO

* 東京工業大学大学院 総合理工学研究科 システム科学専攻
Dept. of Systems Science, Tokyo Institute of Technology

ファジィ集合は接点をもつ。

Zadeh の定義では、分布関数 π が一般に正規性条件(5)を満たさないので、可能性測度 Π も一般に正規($\Pi(\Omega) = 1$)でない。しかし、我々は ambiguity の標準設定 A2「 Ω は可能な答えをすべて含んでいる」と要請③「確実に A なら、 $g(A) = 1$ 」を仮定しているので、 $\Pi(\Omega) = 1$ でなければならない(A2 と③は、2.1 節または次節を参照)。従って、ここでは正規な可能性測度だけを扱う。劣正規($\Pi(\Omega) \leq 1$)な場合は次節で議論する。

可能性測度 Π と、 Π を与える可能性分布関数 π は 1 対 1 の関係にある。 π から Π は(6)式で、 Π から π は次式で与えられる：

$$\pi(\omega) = \Pi(\{\omega\}) \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (9)$$

可能性測度 Π に双対的な測度 N は、Dubois と Prade [18] によって、必然性測度と命名された。

[定義 2.6.2] Ω を空でない集合とする。 N が Ω 上の必然性測度(necessity measure)であるとは、 Ω 上のある可能性測度 Π が存在して、

$$N(E) = 1 - \Pi(E^c) \quad \forall E \subset \Omega \quad (10)$$

となることをいう。 E^c は E の補集合である。

N を可能性分布関数 π で表すと、(6)、(10)より

$$N(E) = \inf\{1 - \pi(\omega) \mid \omega \in E^c\} \quad (11)$$

となる。なお、 $\inf \emptyset \triangleq 1$ とする。

(10)式は、次式と同値である：

$$\Pi(E) = 1 - N(E^c) \quad \forall E \subset \Omega. \quad (12)$$

そして、(10)、(12)式はそれぞれ、様相論理学の可能性と必然性の関係(1)、(2)式に対応している。

可能性測度、必然性測度に限らず、一般に(10)式の関係にある 2 つの測度 N と Π を双対関係にあるという。例えば、確信関数 Bel と plausibility 関数 Pl も双対関係にある：

$$Pl(E) = 1 - Bel(E^c). \quad (13)$$

また、確率測度 P は

$$P(E) = 1 - P(E^c) \quad (14)$$

なので自己双対である。明らかに、あるファジィ測度に双対的な測度はまたファジィ測度である。したがって、必然性測度はファジィ測度である。

では、まず次の例で可能性の意味を直観的につかんでいただきたい。最初の例のオリジナルは Zadeh [12] である。

[例 2.6.1]「今日、竹田君は朝食に何個の卵を食べたか」という質問を考える。竹田君は毎朝かならず卵を食べるので、正解 ω_0 は $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ の中にある。可能性分布関数 $\pi(\omega)$ は、「竹田君は朝食に卵を ω 個食べられる」ことの容易さの程度を与える。一方、「竹田君が朝食に卵を ω 個食べる」確率 $p(\omega)$ も与えることができる。それぞれの分布は、たとえば表 1 のようになる。

表 1 可能性分布と確率分布

ω	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(\omega)$	1	1	1	1	0.8	0.4	0.1	0
$p(\omega)$	0.7	0.25	0.05	0	0	0	0	0

次の例も直観的にわかりやすいだろう。

[例 2.6.2] 偏りのないコイン 1 枚を投げ、表と裏のどちらが出るかを問題にする。正解 ω_0 は $\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$ の中にある。明らかに確率 P は、 $P(\{\text{表}\}) = P(\{\text{裏}\}) = 1/2$ で与えられる。表も裏も等しく可能なので、可能性 Π は、 $\Pi(\{\text{表}\}) = \Pi(\{\text{裏}\}) = 1$ 。一方が他方に比べて起りやすいという必然性はないので、必然性 N は、 $N(\{\text{表}\}) = N(\{\text{裏}\}) = 0$ となる。

Dubois と Prade [52] が指摘しているように、日常に使う「可能」ということばの意味には、2 つの側面がある。ひとつは事象の生起そのものに関するものであり、もうひとつは事象を生起させる能力に関するものである。上の例において、「竹田君が卵を 3 個食べる」という事象の「生起」の可能性と、「竹田君が卵を 3 個食べられる」という「能力」の可能性は、その意味からして異なる。なお、ここでの「能力」は、能動的なものばかりでなく、受動的なものも含んでいる。たとえば、

「この木は、強風で倒され得る」, 「この木は、強風で倒されることによって、隣の家を壊すことができる」などという場合も含む。

従来、可能性については、「生起」の可能性を確率として表現することしか行われてこなかった。Zadeh [12] は、2つの可能性を、「生起」や「能力」という言葉でなく、確率分布 p と可能性分布 π という形で区別した。この2つの可能性の区別、特に「能力」の可能性の導入は、信頼性解析などに興味深い結果をもたらすと期待される。

さて、「生起」と「能力」の可能性の間には、
 $R1 : (\text{生起し得る}) \Rightarrow (\text{生起させる能力がある})$,
 $R2 : (\text{生起し得ない}) \not\Rightarrow (\text{生起させる能力がない})$,
 のような関係がある。 $R2$ については、上の例で「竹田君は朝に卵を4個食べることはない(確率0)が、食べようとすれば平気で食べられる(可能性1)」ことが説明になっているだろう。

Zadeh [12] も、可能性と確率に関して、 $R1, R2$ に対応する関係を提出している。可能性/確率調和原理(possibility/probability consistency principle)と呼ばれる次の関係である。

確率が高い $\Rightarrow$ 可能性も高い,

可能性が低い $\Rightarrow$ 確率も低い,

可能性が高い $\not\Rightarrow$ 確率も高い,

確率が低い $\not\Rightarrow$ 可能性も低い.

必然性について言い替えると、下の様になる。

必然性が高い $\Rightarrow$ 確率も高い,

確率が低い $\Rightarrow$ 必然性も低い

確率が高い $\not\Rightarrow$ 必然性も高い,

必然性が低い $\not\Rightarrow$ 確率も低い.

Dubois & Pade [18] は、この原理を、次の不等式に翻訳した：

$$N(E) \leq P(E) \leq \Pi(E) \quad \forall E \subset \Omega. \quad (15)$$

この不等式が成り立つとき、必然性測度 N 、確率測度 P 、可能性測度 Π は調和している(言い換えると、 N, P, Π はある事柄の確からしさについて互いに矛盾しない見方を与えている)とみるのである。これはコイン投げの例(例2.6.2)で考えるとわかりやすいだろう($N(\{\text{表}\}) = 0 \leq P(\{\text{表}\}) = 1/2 \leq \Pi(\{\text{表}\}) = 1$)。例2.6.1でも、この不等式は

成立している。式(15)が可能性/確率調和原理を含んでいることは容易にわかる。例えば、確率 $P(E)$ が高ければ、可能性 $\Pi(E)$ は $P(E)$ 以上なので、高い値をとる。なお、(15)式は様相論理の(3), (4)式に対応しているとも見られる。

Zadeh が導入した、例2.6.1の可能性分布 π は、「能力」の可能性を測ったものであった。Dubois と Prade [52, 53] は、「生起」の可能性も可能性分布で表すことを議論している。これについては後述する。

では、測度 Π と N の性質を見ていこう。

【命題2.6.1】 Ω を有限集合とする。 $\Pi : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ が Ω 上の可能性測度であるための必要十分条件は、次の(p1), (p2)が成り立つことである：

$$(p1) \quad \Pi(\Omega) = 1, \quad \Pi(\emptyset) = 0$$

$$(p2) \quad \Pi(E \cup F) = \Pi(E) \vee \Pi(F).$$

N が Ω 上の必然性測度であるための必要十分条件は、次の(n1), (n2)が成り立つことである：

$$(n1) \quad N(\Omega) = 1, \quad N(\emptyset) = 0,$$

$$(n2) \quad N(E \cap F) = N(E) \wedge N(F).$$

上の命題より、任意の $E \subset \Omega$ に対し、

$$\Pi(E) = 1 \quad \text{または} \quad \Pi(E^c) = 1, \quad (16)$$

$$N(E) = 0 \quad \text{または} \quad N(E^c) = 0 \quad (17)$$

である。

【命題2.6.2】可能性測度 Π と必然性測度 N が互いに双対関係にあるとする。このとき、

$$\Pi(E) < 1 \quad \text{ならば} \quad N(E) = 0, \quad (18)$$

$$N(E) > 0 \quad \text{ならば} \quad \Pi(E) = 1, \quad (19)$$

$$N(E) \leq \Pi(E) \quad \forall E \subset \Omega. \quad (20)$$

(18), (19)式は、(16), (17)式と(10), (12)式より導かれる。また、(20)式は(18), (19)式より従う。なお、(20)式は(15)式から $P(E)$ を除いたものであることに注意されたい。

可能性測度と必然性測度は、Dempster-Shafer 理論と密接な関係がある。次に、これに関して述べよう(Dempster-Shafer 理論については前節を

参照されたい)。

【命題 2.6.3】 Ω を空でない有限集合とする。このとき、 Ω 上の可能性測度は plausibility 関数であり、 Ω 上の必然性測度は確信関数である。また、 Ω 上の plausibility 関数 Pl 、確信関数 Bel がそれぞれ可能性測度、必然性測度であるための必要十分条件は、焦点要素が入れ子(任意の焦点要素 E, F に対し、 $E \subset F$ または $F \subset E$)になっていることである。

Shafer [8] は、焦点要素が入れ子になっている確信関数を協和確信関数(consonant belief function)と呼んだ。数学的には、有限集合上の協和確信関数と必然性測度は同じものである。

では、可能性測度 Π を plausibility 関数 Pl として与える基本確率割当 m を構成してみよう。 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 、 Π を 2^Ω 上の可能性測度、 $\pi_i = \Pi(\{i\})$ $i=1, 2, \dots, n$ 、 $1 = \pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_n$ とする。このとき、 m は、次式で与えられる。

$$m(E) = \begin{cases} \pi_i - \pi_{i+1}, & E = \{1, 2, \dots, i\}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (21)$$

ただし、 $\pi_{n+1} \triangleq 0$ である。この m によって定まる plausibility 関数 Pl が Π に一致することを確認しよう。 E を Ω の任意の部分集合とする。 $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_n$ なので、 $i_E \triangleq \min\{i \mid i \in E\}$ とおくと、 $\Pi(E) = \sup_{i \in E} \pi_i = \pi_{i_E}$ である。一方

$$\begin{aligned} Pl(E) &= \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F) \\ &= \sum_{\{1, 2, \dots, i\} \cap E \neq \emptyset} m(\{1, 2, \dots, i\}) \\ &= \sum_{i=i_E}^n (\pi_i - \pi_{i+1}) \\ &= \pi_{i_E}. \end{aligned}$$

したがって、 $\Pi(E) = Pl(E)$ となる。

【例 2.6.3】例 2.6.1 の可能性測度 Π を plausibility 関数 Pl として与える基本確率 m は

$$m(E) = \begin{cases} 0.2 & E = \{1, 2, 3, 4\}, \\ 0.4 & E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ 0.3 & E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ 0.1 & E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (22)$$

で与えられる。

命題 2.6.3 から、単純支持関数も必然性測度であることがわかる。とくに、無確信関数 Vac も必然性測度である。ここでは Vac を N_0 と書き、 N_0 に双対な可能性測度を Π_0 と書くことにする。

$$N_0(E) = \begin{cases} 1 & E = \Omega \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (23)$$

$$\Pi_0(E) = \begin{cases} 1 & E \neq \emptyset \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (24)$$

N_0 は全体集合 Ω 以外の集合に必然性がまったくないこと、 Π_0 は空集合 $\emptyset$ 以外の集合が完全に可能であることを表している。すなわち、 ω_0 に関してまったく未知である状況を表している(ω_0 および ambiguity の定式化については 2.1 節または次節を参照)。 Vac も何の証拠もない状況を表していたので、 N_0 と Π_0 は意味の上でも Vac に対応したのものになっている。

我々の ambiguity の定式化では、ただ一つの $\omega \in \Omega$ だけが正しく(ω_0 に等しく)、残りの ω は正しくない。一方(24)式より、すべての $\omega \in \Omega$ について $\Pi_0(\{\omega\}) = 1$ である。したがって、一般に $\Pi_0(E) = 1$ であっても“確実に $\omega_0 \in E$ ”とは限らない。同様に、 $N_0(E) = 0$ でも“確実に $\omega_0 \notin E$ ”とは限らない。これらは例 2.6.2 で確認されたい。なお、上のことは Π_0, N_0 に限らず、一般の Π, N についてもいえる。

では、Dubois と Prade[52, 53] による、「生起」の可能性を表す可能性測度 Π について概説しよう。彼らは、確率測度 P を可能性測度 Π に変換することで、「生起」の可能性を表す Π を生成した。

【命題 2.6.4】 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 、 P を 2^Ω 上の確率測度、 $p_i = P(\{i\})$ $i=1, 2, \dots, n$ 、とする。このとき、任意の $E \subset \Omega$ と任意の i について

$$N(E) \triangleq \sum_{i \in E} \max(p_i - \max_{k \notin E} p_k, 0) \quad (25)$$

$$\pi_i \triangleq \sum_{k=1}^n \min(p_i, p_k) \quad (26)$$

$$\Pi(E) \triangleq \max_{i \in E} \pi_i \quad (27)$$

とくと、 N 、 Π は互いに双対な必然性測度、可能性測度になる。またこのとき、 N, Π, P は可能性/確率調和原理の(15)式を満足する：

$$N(E) \leq P(E) \leq \Pi(E) \quad \forall E \subset \Omega.$$

(25)式の意味を、コイン投げを例にとって説明しよう。 $\Omega = \{1, 2\}$ として、1を表、2を裏とする。この場合、(25)式は次の様になる：

$$N(\{1\}) = \max(p_1 - p_2, 0),$$

$$N(\{2\}) = \max(p_2 - p_1, 0).$$

さて、コインに偏りがあって、例えば $p_1 > p_2$ であるとする。このとき、表の方が出やすいので、表が出ることは裏が出ることよりも必然性を持つといえる。(25)式は、その必然性 $N(\{1\})$ を、確率の差 $(p_1 - p_2)$ で見積ることを意味している。なお、裏の出る必然性はないので、 $N(\{2\}) = 0$ となっている。また、コインに偏りがなく、 $p_1 = p_2 = 1/2$ である場合は、 $N(\{1\}) = N(\{2\}) = 0$ となり、例2.6.2に一致する。

この考えを一般の場合に拡張したのが(25)式である。すなわち、 E の各要素 i に対して、 i の確率 p_i が、 E の外の最も起りやすい根元事象の確率 $\max_{k \notin E} p_k$ より大きいならば、その差 $(p_i - \max_{k \notin E} p_k)$ を、 E に対する i の必然性とみなす。そして、各要素 i の必然性の和をとったものが、集合 E の必然性 $N(E)$ なのである。なお、可能性の計算式(26)は、 $\pi_i = 1 - N(\{i\}^c)$ に(25)式を代入することによって得られる。

以下、便宜上 $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ と仮定して(25)-(27)式の変換の性質を説明する。

$p_1 = p_2 = \dots = p_j > p_{j+1}$ とすると、(26)式で定まる N は、次の性質をもつ：

$$\{1, 2, \dots, j\} \subset E \Leftrightarrow N(E) > 0. \quad (28)$$

すなわち、最も起りやすい根元事象をすべて含んでいることが、その事象 E の生起に関する保証

(必然性)を与えるのである。

(26)式を p_i について解くと、

$$p_i = \sum_{k=i}^n (\pi_k - \pi_{k+1}) / k \quad \forall i \quad (29)$$

(ただし、 $\pi_{n+1} = 0$)となる。(26)、(29)式は可能性分布と確率分布の間の1対1対応を与える。この対応は次の性質をもつ：

$$\pi_i > \pi_{i+1} \Leftrightarrow p_i > p_{i+1}, \quad (30)$$

$$\pi_i = \pi_{i+1} \Leftrightarrow p_i = p_{i+1}, \quad (31)$$

$$\pi_n = 0 \Leftrightarrow p_n = 0. \quad (32)$$

したがって、特に次式が成り立つ：

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_j = 1, \pi_{j+1} = \dots = \pi_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_j = 1/j, p_{j+1} = \dots = p_n = 0. \quad (33)$$

(29)式に(21)式を当てはめて変形すると、

$$p_i = \sum_{k=i}^n m(\{1, 2, \dots, k\}) / k$$

$$= \sum_{E \ni i} m(E) / |E| \quad \forall i \quad (34)$$

となる。(34)式は、基本確率割当 m を確率測度 P に変形する自然な方法と言えよう。この方法は、値 $m(E)$ を E の各要素に等しく分配する。Bayes推論において、事前確率が未知のときに一様分布が想定されるのと同じ考え方である。

例2.6.1の p に(26)式を適用して得られる可能性分布 π' を表2に示す。

表2 可能性分布と確率分布

ω	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(\omega)$	1	1	1	1	0.8	0.4	0.1	0
$p(\omega)$	0.7	0.25	0.05	0	0	0	0	0
$\pi'(\omega)$	1	0.55	0.15	0	0	0	0	0

ここで、「生起」と「能力」の可能性の関係 R_2 に対応する次式が成立していることに注意されたい。

$$\pi'(\omega) \leq \pi(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (35)$$

最後に、二つの可能性分布関数 π_1, π_2 の結合について述べる。Zadeh [12]の考え方からすると、 π_1, π_2 は

$$\pi(\omega) \triangleq \pi_1(\omega) \wedge \pi_2(\omega) \quad (36)$$

($\wedge$ は min 演算) なる可能性分布 π へ統合される。しかし、この π は一般に正規性 ($\sup_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$) を持つとは限らない (図 2)。我々は ambiguity の標準設定 A2 と要請③ (2.1 節または次節を参照) を仮定しているの、可能性分布関数 π は正規でなければならない。すなわち、(36) 式を正規化する必要がある。実際 Zadeh [12] も、応用対象によっては正規化した方がよい場合があるだろうと述べている。ここでは、Dubois & Prade [54] による結合規則を紹介する。

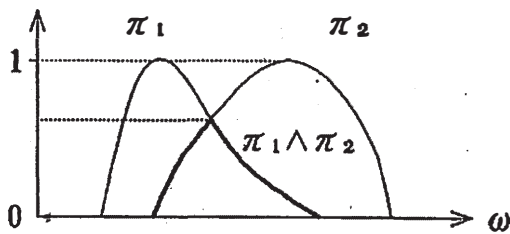


図 2 確率分布から可能性分布へ

[定義 2.6.3] Π_1, Π_2 を Ω 上の可能性測度, π_1, π_2 をそれぞれの可能性分布関数, N_1, N_2 をそれぞれに双対な必然性測度とする。

$$\pi(\omega) \triangleq [\pi_1(\omega) * \pi_2(\omega)] / \xi \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (37)$$

$$\xi \triangleq \sup_{\omega \in \Omega} [\pi_1(\omega) * \pi_2(\omega)] \quad (38)$$

($*$ は t ノルム) なる可能性分布関数 π を π_1 と π_2 の結合, π から生成される可能性測度 Π を Π_1 と Π_2 の結合, Π に双対的な必然性測度 N を N_1 と N_2 の結合という。 $\xi = 0$ のときには、これらの結合は定義されない。

なお、必然性測度は確信関数なので、2 つの必然性測度 N_1, N_2 の結合に Dempster の結合則を用いることもできる。しかしこの場合、結合後の測度 $N_1 \oplus N_2$ は、一般に必然性測度にはならない。したがって、可能性測度と必然性測度の理論では、

Dempster の結合則は用いられない。

2.7 Ambiguity の定式化の補足

一劣正規ファジィ測度一

2.1 節で、ambiguity の定式化を行い、前節までその定式化のもとで議論してきた。まず、それを振り返ってみよう。

ω_0 をある一つの質問に対する正しい答とし、 Ω を答の候補からなる集合とする。これに関して、次の仮定 (ambiguity の標準設定) をおいた。

A 1 : 集合 Ω の要素は互いに排反であり、複数の要素が同時に正解となることはない。

A 2 : Ω は質問の可能な答のすべてを含んでおり、 Ω 中に必ず正解がある。

正解 ω_0 に対する知識または判断を表現するため、確からしさを数値で表す方法をとることにした。そして、命題 A の確からしさを表す数値 $g(A)$ に対して、次の 3 つの要請をおいた。

① 命題 B が命題 A より確からしい、または同程度に確からしいならば、 $g(A) \leq g(B)$ 。

② 確実に “ A でない” ならば、 $g(A) = 0$ 。

③ 確実に A ならば、 $g(A) = 1$ 。

(これら 3 つは ambiguity の標準設定とは独立であることに注意されたい。) 我々が扱う命題は “ $\omega_0 \in E$ ” の形のもののだけなので、 $g(\omega_0 \in E)$ を簡単に $g(E)$ と書くことにした。そして、ambiguity の標準設定 A1, A2 と要請①, ②, ③から、次のファジィ測度の公理が設けられたのであった：

$$E \subset F \Rightarrow g(E) \leq g(F)$$

$$g(\emptyset) = 0,$$

$$g(\Omega) = 1.$$

ここで、2.1 節の例(c), (d)について ambiguity の標準設定 A1, A2 を吟味してみよう。

(c) 「ある殺人事件の容疑者、勝又、小林、百武のうち、真犯人は誰か?」

ω_0 : 真犯人,

$\Omega = \{\text{勝又, 小林, 百武}\}.$

(d) 「ヤスカワ氏の奥さんは何歳か?」

ω_0 : 奥さんの年齢,

$\Omega = \{\omega \mid \omega \text{ は } 16 \text{ 以上 } 120 \text{ 以下の整数}\}.$

上の例で A1 の成立しない場合は容易に考えられる。例えば(c)で、3 人のうちの何人かが共に犯人、すなわち共犯ということは起こり得る。(d)についても、ヤスカワ氏が一夫多妻制の国に国籍をもち、異なる年齢の夫人が何人かいれば、正解は一つではない。

A2 が成り立たないことも起こり得る。(c)については、真犯人は上の 3 人の他に在る可能性がある。また、被害者は殺されたのではなく事故死であって真犯人などいないかも知れない。(d)については、日本では女性が結婚できるのは 16 才以上なので上のように Ω を定めたが、ヤスカワ夫妻が日本国籍でないなら ω_0 は 16 未満も可能である。 $\Omega = \{\omega \mid \omega \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}\}$ としても、ヤスカワ氏が未婚ならば ω_0 は Ω に値をとらない。

2.4 節で、故障診断システムなども ambiguity の枠組みでとらえられると述べた。そのようなシステムにおいても、A1, A2 が成立しないことは起こり得る。診断システムに取り込んでいなかったような全く予想外の箇所が故障することも、数ヶ所が同時に故障することも起こり得るからである。

上述の問題に対処する方法は 2 通りある。一つは、A1, A2 が成り立つように、 Ω , ω_0 を設定し直し、これまでの ambiguity の標準設定の下での理論を適用するものである。すなわち、 Ω でない別の集合 Ω' の上に、ambiguity の標準設定の下でファジィ測度を定義するのである。

もう一つは、ambiguity の標準設定に縛られない理論を構築することである。 Ω 上に ω_0 に関する知識を表現する何らかの集合関数を定義し、 Ω 上だけで議論する。

以下、A1 は成り立たつが A2 が成り立たない場合、A1, A2 の両方とも成り立たない場合の 2 つの場合について、上述の 2 つの対処法を議論する。

2.7.1 A2 だけが不成立の場合。

ここでは、A1 (正解が複数のことはない) は仮

定するが、A2 (Ω 中に必ず正解がある) は仮定しない。まず、 Ω , ω_0 を設定し直す場合について述べる。

Ambiguity の標準設定 A2 は、次の様にして回復できる。 $\$$ を $\$ \notin \Omega$ なる任意の記号として、 Ω の代わりに $\Omega_* \triangleq \Omega \cup \{\$\}$ を全体集合とする (図 3)。そして、 Ω 中に正解がないことを $\omega_0 = \$$ で表現するのである。例えば(c)については、

$$\Omega_* \triangleq \{\text{勝又, 小林, 百武, \$}\},$$

$$\omega_0 = \begin{cases} \text{勝又,} & \text{勝又が犯人のとき,} \\ \text{小林,} & \text{小林が犯人のとき,} \\ \text{百武,} & \text{百武が犯人のとき,} \\ \$, & \text{犯人が 3 人以外のとき,} \end{cases}$$

となる。(d)については以下の様になろう：

$$\Omega_* \triangleq \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\$, \}$$

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega, & \omega \text{ 歳の夫人がいるとき,} \\ \$, & \text{夫人がいないとき.} \end{cases}$$

このように定めた (Ω_* , ω_0) が、ambiguity の標準設定 A1, A2 を満足することは明らかだろう。したがって、 Ω_* 上にファジィ測度—確信関数や可能性測度や一般のファジィ測度—を定義して、議論すればよい。

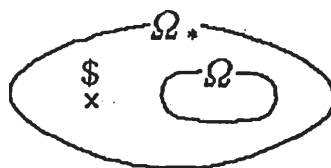


図3 A2 の回復

では次に、全体集合 Ω を変形することなしに、ambiguity を Ω 上の集合関数で表現することを考えよう。 E を Ω の部分集合として、命題“ $\omega_0 \in E$ ”の確からしさを、要請①, ②, ③に沿って、 $g(E) \in [0, 1]$ で表す。すると、2.1 節と同様、

$$E \subset F \Rightarrow g(E) \leq g(F) \quad (39)$$

$$g(\emptyset) = 0, \quad (40)$$

となる。しかし、 $g(\Omega) = 1$ である必然性はなくなる。A2 (Ω 中に正解がある) を仮定しないので、

“ $\omega_0 \in \Omega$ ” が確実ではなくなるからである。

そこで、我々は(39), (40)だけを満たす集合関数 $g: S \rightarrow [0, 1]$ を考えることになる (S は Ω の部分集合からなる Boole 代数である)。

[定義 2.7.1] Ω を空でない集合, S を Ω の部分集合からなる Boole 代数とすると、(39), (40) を満たす S 上の集合関数 $g: S \rightarrow [0, 1]$ を劣正規 (subnormal) ファジィ測度という。特に $g(\Omega) < 1$ のとき、狭義劣正規であるといい、 $g(\Omega) = 1$ のときは正規 (normal) であるという。

以下、劣正規な確信関数、plausibility 関数、可能性測度、必然性測度について、Dubois & Prade [52] を参考に概説しよう。

まず、劣正規確信関数と劣正規 plausibility 関数について述べる。

[定義 2.7.2] Ω を空でない有限集合とする。 $Bel: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ が Ω 上の劣正規確信関数であるとは、 $\sum_{F \subset \Omega} m(F) = 1$ なる関数 $m: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ が存在して、

$$Bel(E) = \sum_{F \subset E, F \neq \emptyset} m(F) \quad \forall E \subset \Omega \quad (41)$$

となることをいう。 m を (一般) 基本確率割当と呼ぶ。このとき劣正規 plausibility 関数 Pl は、

$$Pl(E) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F) \quad \forall E \subset \Omega \quad (42)$$

で定義される。

正規な場合の定義(2.5節)と異なるのは、基本確率割当 m に $m(\emptyset) = 0$ を仮定していない点と、(41), (42)の右辺で $m(\emptyset)$ を除いて和をとっている点である。このとき、

$$Bel(\Omega) = Pl(\Omega) = 1 - m(\emptyset) \leq 1 \quad (43)$$

であり、値 $m(\emptyset)$ は “ $\omega_0 \notin \Omega$ ” に対する支持度と解釈できる。

劣正規確信関数、劣正規 plausibility 関数は、(39), (40) が成立するので、劣正規ファジィ測度で

ある。また、2.5 節で紹介した多くの性質を保持している：

$$Bel\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \geq \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right), \quad (44)$$

$$Pl\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} Pl\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right), \quad (45)$$

$$Bel(E) \leq Pl(E) \quad \forall E \subset \Omega. \quad (46)$$

Bel と Pl は、次式の関係にある：

$$Bel(E) + Pl(E^c) = 1 - m(\emptyset) \quad \forall E \subset \Omega. \quad (47)$$

さて、 $m(\emptyset)$ を “ $\omega_0 \notin \Omega$ ” に対する支持度と解釈すると、劣正規確信関数どうしの結合は以下の様に定義できる。

[定義 2.7.3] Bel_1, Bel_2 を Ω 上の劣正規確信関数、 m_1, m_2 をそれぞれの基本確率割当とすると、 Bel_1 と Bel_2 の結合 Bel の基本確率割当 m は、

$$m(E) \triangleq \sum_{F \cap G = E} m_1(F) \cdot m_2(G) \quad \forall E \subset \Omega \quad (48)$$

で与えられる。

矛盾する焦点要素 ($m_1(F) > 0, m_2(G) > 0, F \cap G = \emptyset$ なる F と G) は、“ $\omega_0 \notin \Omega$ ” を支持すると解釈する。したがって、 $E = \emptyset$ のときにも (48) 式が使われ、“ $\omega_0 \notin \Omega$ ” に対する支持度 $m(\emptyset)$ となる。

$$m(\emptyset) = \sum_{F \cap G = \emptyset} m_1(F) \cdot m_2(G). \quad (49)$$

矛盾を “ $\omega_0 \notin \Omega$ ” に対する支持 $m(\emptyset)$ として残すので、正規化は行なわない。よって、結合結果 Bel も劣正規確信関数となる。

次に、劣正規な可能性測度と必然性測度について述べる。

[定義 2.7.4] Ω を空でない集合とする。 Π が Ω 上の劣正規可能性測度であるとは、関数 $\pi: \Omega \rightarrow [0, 1]$ が存在して、

$$\Pi(E) = \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in E\} \quad \forall E \subset \Omega \quad (50)$$

(ただし, $\sup \emptyset = 0$ とする)

となることをいう。劣正規可能性測度 Π を与える関数 π を (劣正規) 可能性分布関数と呼ぶ。また, 劣正規可能性測度 Π に対し,

$$N(E) \triangleq \Pi(\Omega) - \Pi(E^c) \quad \forall E \subset \Omega \quad (51)$$

で定まる N を劣正規必然性測度という。

可能性分布関数 π に正規性 ($\sup_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$) を仮定しないところが, 前節の可能性測度の定義と異なる。また劣正規ファジィ測度の場合, (51) 式で双対性を定義する。劣正規な Bel や Pl と同様, $1 - \Pi(\Omega) (= 1 - N(\Omega))$ は “ $\omega_0 \notin \Omega$ ” の確らしさと解釈される。

劣正規可能性測度, 劣正規必然性測度は, それぞれ前節の可能性測度, 必然性測度の多くの性質を保持している。たとえば

$$\Pi(\emptyset) = 0, \quad (52)$$

$$\Pi(E \cup F) = \Pi(E) \vee \Pi(F), \quad (53)$$

$$N(\emptyset) = 0, \quad (54)$$

$$N(E \cap F) = N(E) \wedge N(F), \quad (55)$$

$$N(E) \leq \Pi(E) \quad \forall E \subset \Omega. \quad (56)$$

また, 正規のときと同様, 劣正規可能性測度, 劣正規必然性測度はそれぞれ, 劣正規 plausibility 関数, 劣正規確信関数である。

劣正規可能性測度の結合は, 劣正規確信関数の結合と同様, 正規化しない。

【定義 2.7.5】劣正規可能性分布 π_1, π_2 の結合 π は, 次式で定義される。

$$\pi(\omega) \triangleq \pi_1(\omega) * \pi_2(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (57)$$

$*$ は t-ノルムである。

$*$ = $\wedge$ のとき, 上の結合法は Zadeh [12] の考え方に一致する。

2.7.2 A1 も不成立の場合

ここでは, A1 が成立しない場合, すなわち正解が複数ありえる場合を扱う。まず, Ω, ω_0 の再設定により A1 を回復するには, ω_0 の代わりに Ω 中

の正解全体の集合 ω_0^* を考えればよい。 ω_0^* は Ω の部分集合なので, Ω の代わりに $\Omega^* \triangleq 2^\Omega$ を全体集合とすれば, $\omega_0^* \in \Omega^*$ となる (図 4)。

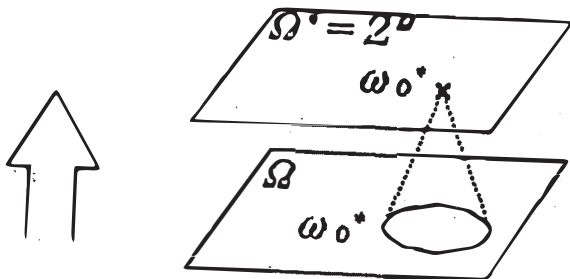


図4 A1の回復

先にあげた例(c)では,

$$\Omega^* \triangleq \{ \emptyset, \{\text{勝又}\}, \{\text{小林}\}, \{\text{百武}\},$$

$$\{\text{勝又, 小林}\}, \{\text{勝又, 百武}\}, \{\text{小林, 百武}\},$$

$$\{\text{勝又, 小林, 百武}\} \},$$

$$\omega_0^* \triangleq \{ \omega \in \Omega \mid \omega \text{ は犯人} \}$$

である。例えば「勝又と小林が犯人で, 百武は犯人ではない」は, $\omega_0^* = \{\text{勝又, 小林}\}$ で表される。

また, Ω 中に正解がないことは, $\omega_0^* = \emptyset$ で表せる。したがって, A2 (Ω 中に正解がある) が不成立の場合も上の枠組で表すことができる。A2 が仮定できるなら, $\Omega^* \triangleq 2^\Omega - \{\emptyset\}$ とすればよい。

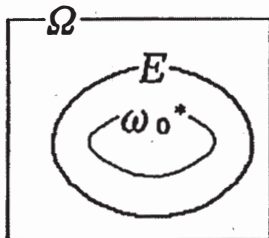
注: 上の設定では, 「犯人はどこにもいない (事故死や病死)」と「 Ω の中に犯人はいないが, 他に真犯人がいる」を区別すべき場合でも, 両者とも $\omega_0^* = \emptyset$ で表すしかない。しかし, 両者を区別する別の設定もできる (付録 1 参照)。ここでは, そのような区別をしないで議論を進める。

以下, A2 も不成立と仮定し, $\Omega^* = 2^\Omega$ とする。さて, 上のように定めた Ω^*, ω_0^* に対して, A1, A2 を仮定できるのは明らかである。理論的にはこれでよいが, 実際にエキスパートシステムなどに应用する場合には問題が起る。 Ω の代わりに $\Omega^* = 2^\Omega$ とすると, システムが複雑になってしま

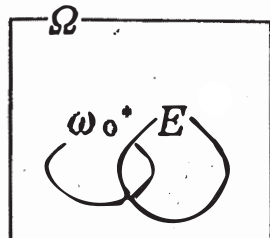
うからである。これは、 Ω と Ω^* の要素数を考えれば明らかである。 $|\Omega|=n$ とすると $|\Omega^*|=2^n$ であり、さらに Ω^* は 2^{2^n} 個の部分集合を持つ。したがって、 2^{2^n} 上のファジィ測度を与えるためには 2^{2^n} 個の値を定めねばならないのである。

そこで次に、集合 Ω を変形せずに、正解全体の集合 $\omega_0^* \subset \Omega$ に関する知識または判断を Ω 上の集合関数で表現することを考える。標準設定の下では正解はただ一つ ω_0 だけだったので、扱う命題は“ $\omega_0 \in E$ ” (E は Ω の部分集合)の形のものだけであった。今回は、対象とする命題として次のようなものが考えられよう。

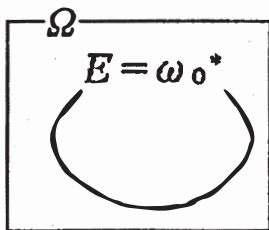
- I. $\omega_0^* \neq \emptyset$ & $\omega_0^* \subset E$: 「正解があり、それらは全て E の中にある」,
- II. $\omega_0^* \cap E \neq \emptyset$: 「 E の中に少なくとも1つの正解がある」,
- III. $E = \omega_0^*$: 「 E の要素は全て正解であり、 E の外に正解はない」,
- IV. $E \subset \omega_0^*$: 「 E の要素は全て正解である」 (図5参照)。



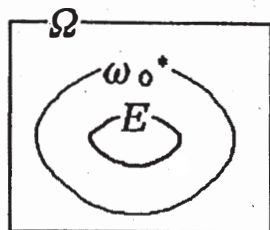
(a) I



(b) II



(c) III



(d) IV

上のような形の命題 A について、その確からしさの度合を実数 $g(A)$ で与える。 g に関する3つ

の要請①, ②, ③をそのまま用いることにする。

簡単のため、 $g(\omega_0^* \neq \emptyset \text{ \& } \omega_0^* \subset E)$, $g(\omega_0^* \cap E \neq \emptyset)$, $g(\omega_0^* = E)$, $g(E \subset \omega_0^*)$ をそれぞれ、 $g_I(E)$, $g_{II}(E)$, $g_{III}(E)$, $g_{IV}(E)$ で表す。それぞれについて、単調性や、 $\emptyset$, Ω の値を調べてみよう。

I: $E \subset F$ のとき、 $\omega_0^* \subset E \Rightarrow \omega_0^* \subset F$ なので、要請①より

$$g_I(E) \leq g_I(F) \quad (58)$$

となり、単調性をもつ。“ $\omega_0^* \neq \emptyset$ and $\omega_0^* \subset \emptyset$ ” は矛盾なので、②より

$$g_I(\emptyset) = 0. \quad (59)$$

“ $\omega_0^* = \emptyset$ ” は起り得るので、“ $\omega_0^* \subset \Omega$ and $\omega_0^* \neq \emptyset$ ” は恒真とは限らない。従って、 $g_I(\Omega) \neq 1$ である必然性はない。

II: $E \subset F$ のとき、 $\omega_0^* \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \omega_0^* \cap F \neq \emptyset$ である。従って、I と同様、要請①より

$$g_{II}(E) \leq g_{II}(F) \quad (60)$$

“ $\omega_0^* \cap \emptyset \neq \emptyset$ ” も矛盾なので、I と同様に

$$g_{II}(\emptyset) = 0. \quad (61)$$

“ $\omega_0^* = \emptyset$ ” が起り得るので、“ $\omega_0^* \cap \Omega \neq \emptyset$ ” も恒真とは限らない。したがって、 $g_{II}(\Omega) \neq 1$ である必然性もない。ただし、“ $\omega_0^* \cap \Omega \neq \emptyset$ ” $\Leftrightarrow$ “ $\omega_0^* \subset \Omega$ and $\omega_0^* \neq \emptyset$ ” なので、 $g_{II}(\Omega) = g_I(\Omega)$ である。

III: $E \subset F$ であろうとなかろうと、 $E \neq F$ ならば $\Rightarrow \omega_0^* \neq F$, $\omega_0^* = F \Rightarrow \omega_0^* \neq E$ である。よって、 g_{III} は単調性とは無関係である。

“ $\omega_0^* = \emptyset$ ” のことも、“ $\omega_0^* \neq \emptyset$ ” のこともありうるので、 $g_{III}(\emptyset)$ の値については何もいえない。また、“ $\omega_0^* = \Omega$ ” のことも“ $\omega_0^* \neq \Omega$ ” のこともあり得るので、 $g_{III}(\Omega)$ の値についても何もいえない。

IV: $E \subset F$ のとき、 $F \subset \omega_0^* \Rightarrow E \subset \omega_0^*$ である。したがって、①より

$$g_{IV}(E) \geq g_{IV}(F). \quad (62)$$

すなわち g_{IV} は単調減少である。“ $\emptyset \subset \omega_0^*$ ” は恒真なので、

$$g_{IV}(\emptyset) = 1 \quad (63)$$

である。“ $\Omega \subset \omega_0^*$ ”と“ $\omega_0^* = \Omega$ ”は同値なので $g_{IV}(\Omega) = g_{III}(\Omega)$ ではあるが、その値については何もいえない。

以上から、 g_I と g_{II} は劣正規ファジィ測度であり、 g_{III} と g_{IV} はそうでないことがわかる。なお、 $g_I(\Omega) (= g_{II}(\Omega))$ は“ $\omega_0^* \neq \emptyset$ ”の確からしさなので、 $1 - g_I(\Omega) (= 1 - g_{II}(\Omega))$ は、“ $\omega_0^* = \emptyset$ (Ω 中に正解がないこと)”の確からしさといえる。

次に、 Ω を空でない有限集合とし、 ω_0^* に関する知識または判断が $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ 上の確率測度 P で表現されている場合を考えてみよう。なお、 $\Omega^* = 2^{\Omega}$ である。(このとき、 ω_0^* は Ω 上のランダム集合(random set)と見なせる。簡単にいうと、ランダム集合とは集合値の確率変数である。詳しくは付録2を参照されたい)。

我々は、集合 Ω^* 上の確率測度 P を Ω 上に誘導することによって、 Ω 上の測度 $g_i (i = I, II, III, IV)$ を構成する。すなわち、各 $E \subset \Omega$ に対して、 E に自然に対応する $E^* \subset \Omega^*$ の確率を与える、つまり $g_i(E) \triangleq P(\omega_0^* \in E^*) = P(E^*)$ とするのである(図6)。

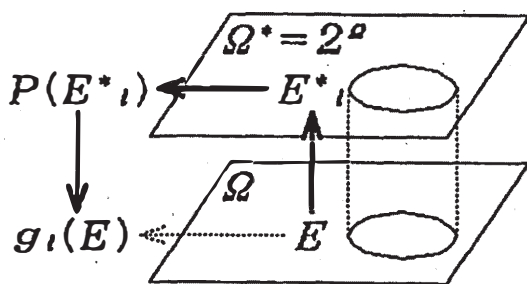


図6 P の Ω 上への誘導

g_{III} の場合、 $\omega_0^* = E \Leftrightarrow \omega_0^* \in \{E\}$ なので、 $E \subset \Omega$ に対応する $E^*_{III} \subset \Omega^*$ は、 $E^*_{III} = \{E\}$ で与えられる。よって、

$$g_{III}(E) \triangleq P(\omega_0^* = E) = P(\omega_0^* \in \{E\}) = P(\{E\}) \quad (64)$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} g_I(E) &\triangleq P(\omega_0^* \subset E, \omega_0^* \neq \emptyset) \\ &= P(\{F \in 2^{\Omega} \mid F \subset E, F \neq \emptyset\}), \end{aligned} \quad (65)$$

すなわち $E^*_I = \{F \in 2^{\Omega} \mid F \subset E, F \neq \emptyset\}$,

$$\begin{aligned} g_{II}(E) &\triangleq P(\omega_0^* \cap E \neq \emptyset) \\ &= P(\{F \in 2^{\Omega} \mid F \cap E \neq \emptyset\}), \end{aligned} \quad (66)$$

すなわち $E^*_{II} = \{F \in 2^{\Omega} \mid F \cap E \neq \emptyset\}$,

$$\begin{aligned} g_{IV}(E) &\triangleq P(E \subset \omega_0^*) \\ &= P(\{F \in 2^{\Omega} \mid E \subset F\}), \end{aligned} \quad (67)$$

すなわち $E^*_{IV} = \{F \in 2^{\Omega} \mid E \subset F\}$ となる。

さて、 P は $(2^{\Omega}, 2^{2^{\Omega}})$ 上の確率測度であるから、

$$\sum_{F \subset \Omega} g_{III}(F) = \sum_{F \in 2^{\Omega}} P(\{F\}) = 1 \quad (68)$$

である。また、

$$g_I(E) = \sum_{F \subset E, F \neq \emptyset} g_{III}(F), \quad (69)$$

$$g_{II}(E) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} g_{III}(F), \quad (70)$$

である。したがって、 g_{III} は一般基本確率割当であり、 g_I は劣正規確信関数、 g_{II} は劣正規 plausibility 関数である。とくに、 $P(\{\emptyset\}) = 0$ ならば、 g_{III} は基本確率割当となり、 g_I, g_{II} は正規となる。このとき、 g_{IV} は共通性関数(commonality function) [8] と呼ばれる集合関数になる。

$P(\{\emptyset\}) = 0$ でなくとも、

$$Bel(E) \triangleq g_I(E) / (1 - P(\{\emptyset\})), \quad (71)$$

$$Pl(E) \triangleq g_{II}(E) / (1 - P(\{\emptyset\})), \quad (72)$$

$$Q(E) \triangleq g_{IV}(E) / (1 - P(\{\emptyset\})) \quad (73)$$

と正規化すれば、それぞれ、正規確信関数、正規 plausibility 関数、共通性関数になる。正規化することとは、条件付確率にするということである。つまり、(71)-(73)は

$$Bel(E) = P(\omega_0^* \subset E \mid \omega_0^* \neq \emptyset), \quad (74)$$

$$Pl(E) = P(\omega_0^* \cap E \neq \emptyset \mid \omega_0^* \neq \emptyset), \quad (75)$$

$$Q(E) = P(E \subset \omega_0^* \mid \omega_0^* \neq \emptyset). \quad (76)$$

と書ける。いずれも、 $\omega_0^* \neq \emptyset$ という条件，すなわち A2 の下での確からしさである。

以上、 ω_0^* に関する知識が $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ 上の確率測度 P で表現されている場合を扱った。 ω_0^* に関する知識が $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ 上の確信関数や可能性測度で表されている場合についても同様に議論できる。

2.7 節を終るにあたり、劣正規性の原因について注意しておく。劣正規性の原因は (A2) の不成立にある。そして $1 - g(\Omega)$ が、“正解が Ω 中にない ($\omega_0 \notin \Omega$ または $\omega_0^* \cap \Omega = \emptyset$)” ことの確からしさの度合を表しているのである。2.7.2 では (A1) と (A2) の双方の不成立を仮定したため、その点が明確になっていなかったおそれがあるので、ここで強調しておく。

“Ambiguity を表すファジィ測度” に関する議論は今回で終る。本章の補足として、Dubois & Prade [55] をお勧めする。非常によいサーベイ論文である。本章では触れられなかった、上界・下界確率や分解可能測度に関する記述もある。

ファジィ測度の結合については、まだ議論の余地がある。Dubois & Prade [55] でも扱われているので参照されたい。

劣正規ファジィ測度に関しても、議論の余地がある。別の機会に詳論したい。

劣正規ファジィ測度に関連して、注意しておきたいことがある。それは「数学的な道具立てが同じであっても、寄って立つ考え方によって理論展開が異なることがある」ということである。たとえば同じ Bel や Pl でも、結合において正規化するか否かは、A2 (Ω 中に必ず正解がある) を仮定するか否かに依存して決まる。同じ理由から、2.7.1 における劣正規確信関数 Bel と劣正規 plausibility 関数 Pl の理論展開と、2.7.2 の Bel と Pl に関する理論展開についても違いがでてくると考えられる。

参 考 文 献

- [8] G. Shafer, *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ., 1976.
- [12] L.A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 3-28.
- [18] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, 1980.
- [50] G.E. Hughes and M.J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London, 1968. (三浦聰, 大浜 茂生, 春藤 修二 訳, 様相論理入門, 恒星社厚生閣)
- [51] 神野, 内井, 論理学 — モデル理論と歴史的背景 —, ミネルヴァ書房, 1976.
- [52] D. Dubois and H. Prade, On Several representations of an uncertain body of evidence, in: *Fuzzy Information and Decision Processes*, M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., North-Holland (1982) 167-181.
- [53] D. Dubois and H. Prade, Unfair coins and necessity measures: towards a possibilistic interpretation of histograms, *Fuzzy Sets and Systems* 10 (1983) 15-20.
- [54] D. Dubois and H. Prade, Possibility Theory: *An Approach to Computerized Processing*, Plenum Press, New York, 1988.
- [55] D. Dubois and H. Prade, Modelling uncertainty and inductive inference: a survey of recent non-additive probability systems, *Acta Psychologica* 68 (1988) 53-78.

付録1. “ $\omega_0^* \neq \emptyset$ and $\omega_0^* \cap \Omega^* = \emptyset$ ” と “ $\omega_0^* = \emptyset$ ” の区別について

「 Ω に犯人はいないが、他に真犯人がいる (“ $\omega_\infty^* \neq \emptyset$ and $\omega_0^* \cap \Omega^* = \emptyset$ ”）」と「犯人はどこにもいない(事故死や病死) (“ $\omega_0^* = \emptyset$ ”）」を識別でき、また識別する必要があるなら、次のようにする：

$$\Omega^* \triangleq 2^{(\Omega \cup \{\$ \})} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{\text{勝又}\}, \{\text{小林}\}, \{\text{百武}\}, \{\$, \}, \\ \{\text{勝又}, \text{小林}\}, \{\text{勝又}, \text{百武}\}, \{\text{勝又}, \$\}, \\ \{\text{小林}, \text{百武}\}, \{\text{小林}, \$\}, \{\text{百武}, \$\}, \\ \{\text{勝又}, \text{小林}, \text{百武}\}, \{\text{勝又}, \text{小林}, \$\}, \\ \{\text{勝又}, \text{百武}, \$\}, \{\text{小林}, \text{百武}, \$\}, \\ \{\text{勝又}, \text{小林}, \text{百武}, \$\} \end{array} \right\},$$

$$\omega_0^* \triangleq \begin{cases} \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ は犯人}\}, & \Omega \text{ 以外に犯人がいないとき,} \\ \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ は犯人}\} \cup \{\$, \}, & \Omega \text{ 以外に犯人がいるとき.} \end{cases}$$

ここで, $\$$ は $\$ \notin \Omega$ なる任意の記号で, Ω の要素以外に正解があるかどうかを示す指標である:

$\$ \in \omega_0^* \Leftrightarrow \Omega$ の要素以外に正解がある,

$\$ \notin \omega_0^* \Leftrightarrow \Omega$ の要素以外に正解はない.

このとき, たとえば「勝又は犯人ではなく, 小林と百武は犯人で, さらに他に共犯者がいる」は $\omega_0^* = \{\text{小林}, \text{百武}, \$\}$ で, 「犯人はどこにもいない(事故死や病死)」は $\omega_0^* = \emptyset$ で表される.

付録2. ランダム集合について

まず, 次の例で直観的に理解してほしい.

[例] 輪投げをする. 棒は1, 2, 3と番号のついた3本, 投げる輪は1個で, 棒に掛かるまで何回でも投げるとする(何回か投げれば, どれかに掛かるとする). (Θ, S, P) を確率空間, $\Omega = \{1, 2, 3\}$ とおくと, 輪の掛かる棒の番号を与える $X: \Theta \rightarrow \Omega$ は確率変数である(図7).

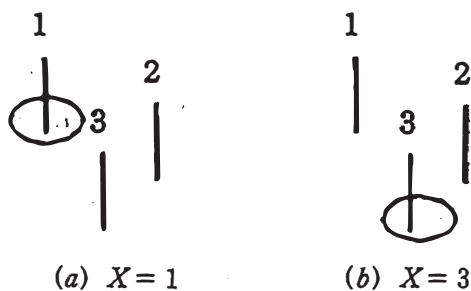


図7 確率変数

次に, 投げる輪を柔らかいロープでできた大きいものに替える. このとき, 輪の掛かった棒の番号の集合を与える $W: \Theta \rightarrow 2^\Omega$ がランダム集合である(図8). なお, 輪が棒に掛からない場合も認めることにすれば, $W = \emptyset$ も起こり得る.

数学的定義は, 以下のとおりである.

[定義] (Θ, S, P) を確率空間, Ω を空でない集合, $\mathcal{C}$ を Ω の部分集合からなるある族, $\mathcal{T}$ を $\mathcal{C}$ の部分集合からなる σ -代数とする. 集合値写像 $W: \Theta \rightarrow \mathcal{C}$ で, S - $\mathcal{T}$ 可測, すなわち $W^{-1}(\mathcal{D}) = \{\theta \in \Theta \mid W(\theta) \in \mathcal{D}\} \in S \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{T}$ であるものをランダム集合(random set)という.

2.7.2 では, $\Theta = \mathcal{C} = \Omega^* (= 2^\Omega)$, $S = \mathcal{T} = 2^{\Omega^*}$, $W(E) = E \quad \forall E \in 2^\Omega$ と見なせばよい.

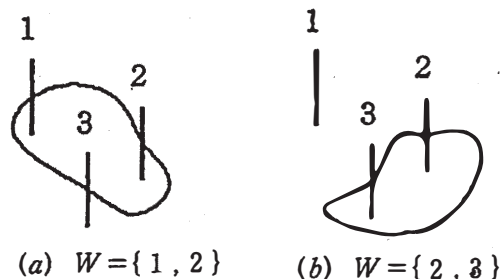


図8 ランダム集合

(1991年4月4日 受付)

[問い合わせ先]

〒227 横浜市緑区長津田町 4259

東京工業大学 大学院 総合理工学研究科

システム科学専攻

室伏 俊明, 菅野 道夫

☎: 045-922-1111 ext.2645, 2641

☎: 045-921-1485 (専攻事務室)

E-MAIL murofusi@sys.titech.ac.jp