第 1 回

「ファジィシステムシンポジウム」

講 演 論 文 集

期　日　　昭和60年 5 月28日(火)・29日(水)

会　場　　京都大学楽友会館

主 催　国際ファジィシステム学会日本支部

「ファジィシステムシンポジウム」

講演論文集

期　日　昭和60年 5月28･29 日
会　場　京都大学楽友会館

主　催　国際ファジィシステム学会日本支部
〒591 堺市もず梅町4-804
大阪府立大学工学部経営工学科内
TEL. 0722-52-1161 EXT. 2377

目　　次

5月28日（火）　　---　頁

★ファジィシステム理論の基礎Ⅰ（9:00 ～ 10:15）
司会　水本　雅晴（大阪電気通信大学）

ファジィ集合の正規型多項式帰属関数について ---------- 1
江沢　義典　関西大学

ファジィシステムにおける随伴性と双対性 ---------- 7
○和泉　孔二　阪南大学
田中　英夫　大阪府立大学
浅居喜代治　〃

ファジィ関係方程式の解集合を変えない係数行列の集合について ---------- 13
○宮腰　政明　北海道大学
新保　勝　〃

☆　☆　☆　☆

★ファジィ・システム理論の基礎ⅠⅠ（10:25 ～11:15）
司会　広田　薫（法政大学）

Fuzzy 論理文によるあいまい情報の表現と近似 ---------- 19
○武田　明秀（株）ソフトピア
向殿　政男　明治大学

ファジィ推論の高速演算 ---------- 25
塚本弥八郎　福井県立短期大学

☆　☆　☆　☆

★ファジィ・システム理論の基礎ⅢⅠ（11:20～ 12:10）
司会　馬野　元秀（大阪大学）

レベル Mファジィ集合について ---------- 29
中西祥八郎　東海大学

Application of Fuzzy Logic for the Interpersonal Perception Method (IPM) ---------- 35
藪内　稔　学習院大学

特別講演 (13:30 ～ 14:30)

司会　西田　俊夫（大阪大学）

Habitual Domain Analysis, A Way to Reduce Human Fuzziness ――――――――――――――――――――― 41
P.L. Yu　University of Kansas

☆　　☆　　☆　　☆

★ファジィ意思決定Ⅰ (14:40 ～ 15:30)

司会　田中　英夫（大阪府立大学）

Interactive Decision Making for Multiobjective Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Parameters ―――― 55
○坂和　正敏　神戸大学
矢野　　均　香川大学

On Some Stochastic Control Processes in a Fuzzy Environment ――――――――――――――――――――― 61
小田中敏男　東京都立工科短大

☆　　☆　　☆　　☆

★ファジィ意思決定ⅠⅠ (15:40 ～ 16:55)

司会　塚本弥八郎（福井県立短期大学）

An Application of Fuzzy Integrals to Multi-Attribute Decision Problems ――――――――――――――――― 67
○市橋　秀友　大阪府立大学
田中　英夫　〃
浅居喜代治　〃

Fuzzy 積分による Human Errorの起こりやすさの推定 ―――――― 75
○鬼沢　武久　東京工業大学
菅野　道夫　〃

多属性ファジィ選好関係に関する一考察 ―――――――――――― 81
中村　和男　工業技術院

★ファジィ意思決定 III (17:05 ～18:20)

司会　西川　禎一（京都大学）

可能的線形回帰モデル ――――――――――――――――――――― 87
○田中　英夫　大阪府立大学
和多田淳三　竜谷大学
浅居喜代治　大阪府立大学

社会事象の因果伝播ネットワークにおける施策効果の
定量的評価法とその政策決定支援システムへの応用 ――――――― 93
○椹木　哲夫　京都大学
岩井　壮介　〃
片井　修　〃

ファジィ伝播モデル ――――――――――――――――――――― 99
森　健一　大阪府立大学

５月２９日（水）

★ファジィ統計・多変量解析（ 9:00 ～ 10:15）
司会　中島　信之（和歌山県立医大）

ファジィ観測によるデータ処理に対する補正について －－－－－－－－ 105
奥田　徹示　大阪工業大学

ファジィ数量化理論 －－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ 111
○和多田淳三　竜谷大学
田中　英夫　大阪府立大学

Fuzzy Clustering and Robust Estimation －－－－－－－－－－－－－ 119
大橋　靖雄　東京大学病院

☆　　☆　　☆　　☆

★ファジィ制御・ロボット工学Ｉ（10:25 ～11:15 ）
司会　村上　周太（九州工業大学）

Ｔ－ノルムとFuzzy 制御 －－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ 125
水本　雅晴　大阪電気通信大学

Fuzzy ロボットに関する研究 －－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ 133
寺野　寿郎　法政大学
○増井　重弘　〃

☆　　☆　　☆　　☆

★ファジィ制御・ロボット工学ＩＩ（11:25 ～ 12:40）
司会　菅野　道夫（東京工業大学）

Membership, vagueness を用いた移動物体把握ロボット －－－－－－－ 139
広田　薫　法政大学
○荒井　良徳　〃

あいまい制御を用いたアーク溶接ロボットの制御 －－－－－－－－－－ 145
○村上　周太　九州工業大学
竹本　文人　〃
藤村　浩史　三菱重工業（株）
井手　栄三　〃

ある手動制御系において定常不規則入力における
オペレータのFuzzy Model の構成 －－－－－－－－－－－－－－－－－ 151
○松島　皓三　筑波大学
軍司　章弘　〃

特別講演（14:30 ～15:15 ）

司会　浅居喜代治（大阪府立大学）

ファジィ動的計画法とその問題 ――――――――――――――― 157
寺野　寿郎　法政大学

☆　　☆　　☆　　☆

★エキスパートシステムⅠ（15:25 ～16:15 ）

司会　岩井　壮介（京都大学）

文献検索におけるファジィ検索要求の言語的アプローチ ――――― 159
○村井　哲也　北海道大学
宮腰　政明　〃
新保　勝　〃

各種Ｆ－クラスタリング・アルゴリズムのテクスチャ解析への応用とその総合評価 ――――――――――――― 165
広田　薫　法政大学
○岩間　和也　〃
国枝　幸秦　〃

☆　　☆　　☆　　☆

★エキスパートシステムⅡ（16:20 ～17:10 ）

司会　江沢　義典（関西大学）

初期診断支援システムの開発 ――――――――――――――― 171
三嶋　博昭　大阪府立成人病センター

ファジィ集合の概念を用いた日本語質問応答システムの試作 ――――――――――――――― 176
馬野　元秀　大阪大学大型計算機センター

５月２８日（火）

ファジィ集合の正規型多項式帰属関数について

江澤義典

（関西大学工学部）

1．はじめに

ファジィ集合を具体的な分野に応用する場合に遭遇する困難の一つが帰属関数（メンバーシップ関数）の決定法である．一般的にはｃｒｉｓｐな特性関数で表現できる部分とｃｒｉｓｐではない中間的な部分とに分けて考えられることが多い．とくに，全体集合が連続であるとき（Ｒと同位相である場合）には帰属度も連続的となることが自然だと思われる。線形計画問題におけるファジィ数[7]とか健全度評価[8]におけるＬＲ型ファジィ数[2]の応用なども直感的な自然さを基に帰属度関数が設定されている．

本報告では，ｃｒｉｓｐな部分とｎｏｎ－ｃｒｉｓｐな部分とからなる『あいまい集合』を連続的帰属度関数によるファジィ集合にて表現する一手法として正規型多項式帰属関数の概念を導入した．そして，帰属度が正規型多項式で表現可能な場合には言語ヘッジを用いた近似推論において非常に自然な処理ができることを示す．

2．正規型多項式帰属関数

［定義１］　ファジィ集合Ａを全体集合Ｘから属性値集合［０，１］への関数

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1] \qquad (1)$$

として定義する．さらに，Ｘは数直線Ｒと同位相であるとする．

［定義２］　集合Ｘの要素ｘがファジィ集合Ａに属する度合い $\mu_A(x)$ が

$$\mu_A(x) = a (x + b)^k + c, \quad k \geq 1, \quad x \in X \qquad (2)$$

と表現できるとき，ｋ次多項式帰属関数という．

［定理１］多項式帰属関数をもつファジィ集合の補集合は多項式帰属関数をもつ．

（例　１）

$$\mu_A(x) = a\,(\,x + b\,)^k + c \tag{3}$$

なるとき，

$$\mu_{\bar{A}}(x) = a'(\,x + b')^k + c' \tag{4}$$

とおくと，

$$a' = -a,\quad b' = b,\quad c' = 1 - c. \tag{5}$$

となる．

（例　２）　ファジィ集合の例『高い』は次のように定義できる：

$$\mu_t(y) = \begin{cases} 0 & y \leqq 140 \\ (y - 140)^2 / 1800 & 140 < y \leqq 170 \\ 1 - (y - 200)^2 / 1800 & 170 < y \leqq 200 \\ 1 & 200 < y \end{cases} \tag{6}$$

ここで，ｙは身長だと考えると140cm 以下の人は決して『高い』とはいえず，200cm 以上であれば必ず『高い』ことになる．

このように，ある閉区間で帰属度が連続的であるファジィ集合は実際的にも扱いやすいと思われる．

［定義３］　全体集合がいくつかの区間に分割され，各閉区間［α，β］において帰属度がｋ次多項式関数で表現され，各区間の中点ｍ＝（α＋β）／２における帰属度が１／２であるとき，そのファジィ集合は正規型多項式帰属関数をもつという．

(1) $X = \bigcup_j A_j$,　~~$A_j = [\alpha_j, \beta_j],\ m_j = (\alpha_j + \beta_j)/2.$~~ (7)

(2) $\mu_{A_j} = a_j (x + b_j)^{k_j} + c_j$

(3) $\mu_{A_j}(v) \geqq 0.5 \rightarrow a_j < 0$ & $c_j = 1$

$\mu_{A_j}(v) \leqq 0.5 \rightarrow a_j > 0$ & $c_j = 0$

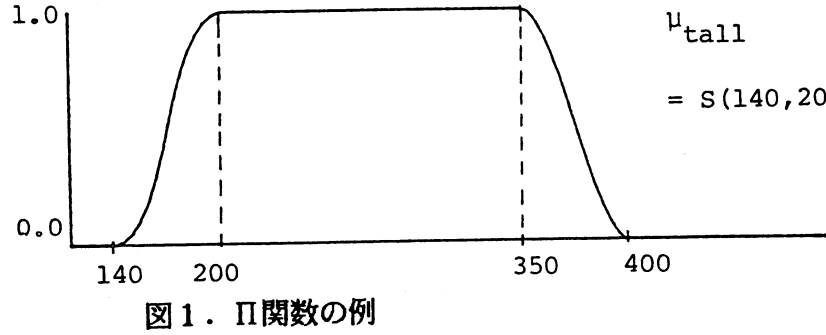
（例　3）　いわゆるＳ関数[1]は正規型２次多項式帰属関数をもつが，より一般にｋ次に拡張したｋ次Ｓ関数：Ｓ（ａ，ｂ；ｋ）は次のようになる．

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq a \\ 0.5 * (x - a)^k / (m - a)^k & a < x \leqq m \\ 1 - 0.5*(x - b)^k/(m - b)^k & m < x \leqq b \\ 1 & b < x \end{cases} \qquad (8)$$

ただし，　$m = (a+b)/2$

［定理２］　多項式帰属関数をもつファジィ集合の和集合および共通集合はともに多項式帰属関数をもつ．

（例　4）　Ｚ関数はＳ関数の補集合であり，Π関数はＳ関数とＺ関数の共通集合となるのでΠ関数は多項式帰属関数をもつ．



μ_{tall}

$= S(140,200;2) \cap Z(350,400;1.5)$

図１．Π関数の例

背の高さが400cm を越える場合には『高い人』というよりはむしろ『巨人』というべきだろう．

３．言語ヘッジと正規型多項式帰属関数

一つのファジィ集合が与えられたとき，色々な言語ヘッジで修飾することにより多様な一連のファジィ集合を系統的に扱うことが可能となる．とくに，帰属度を決定する時点で混入する微妙な情報を含む生の知識を基に近似的推論を行うとき，その結論が準同型規範のもとに合理的であることが報告されている．[5]

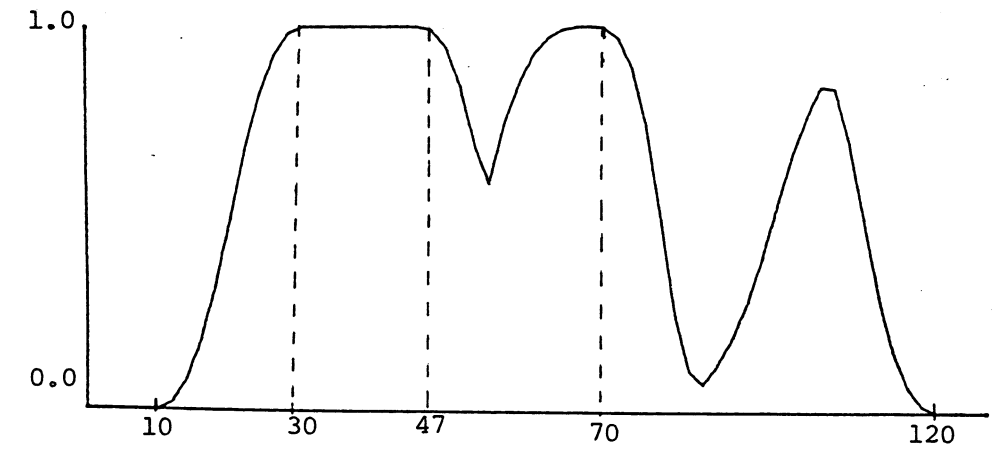
［定理３］　正規型ｋ次多項式帰属関数をもつファジィ集合に対してコントラスト強調ヘッジ INTで修飾したとき正規型２ｋ次多項式帰属関数となる．

［系　４］　正規型ｋ次多項式帰属関数をもつファジィ集合に対して高次コントラスト変更ヘッジα－ INTで修飾したとき正規型αｋ次多項式帰属関数となる．

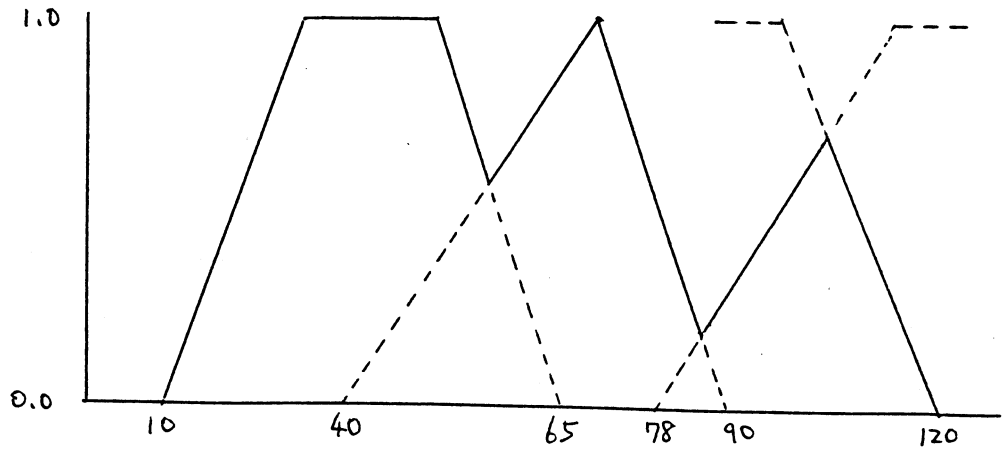
［系　５］　正規型多項式帰属関数をもつ任意のファジィ集合は区間毎に１次式帰属関数を与えて，適当な高次コントラスト変更ヘッジで修飾したファジィ集合と等価である．

（例　５）　$\Pi(10,30,47,65;2)^{U}(S(40,70;3)\cap Z(70,90;3))^{U}$

$(S(78,113;2.5)\cap Z(97,120;2.5))$.



(a)



(b)

図２．コントラスト変更ヘッジの効果

4．おわりに

近似推論が必須となるファジィエキスパートシステムにおいて，正規型多項式帰属関数表現がとくに有用だと思われる．すなわち，専門的知識を獲得するときに，個々の専門家の知識をファジィ集合で表現する場合には，各専門家の個性が含まれたままの情報をそのままの形態で処理するわけにはいかない．したがって，帰属度の半順序構造を保存する準同型ヘッジによる標準化が必要になる．結局，本報告で導入した正規型多項式表現とコントラスト変更ヘッジに帰着されることになる．

参考文献

1) Zadeh,L.A. : Journal of Cybernetics;2-3 (1972).

2) Duboi,D & Prade,H. : Fuzzy Sets and Systems; 2;327-348 (1979).

3) Mizumoto,M & Zimmermann,H.J. : Fuzzy Sets and Systems; 8;253-283 (1982).

4) 菅野 : 計測と制御; 1-6;171-174,380-384,454-458,554-559 (1983).

5) Ezawa,Y. & Mizumoto,M. : Proceedings of the IFAC Symposium,Marseille; 243-248 (1983).

6) Norwitch,A.M. & Prade,H. : Fuzzy Sets and Systems; 12;1-25 (1984).

7) Tanaka,H. & Asai,K. : Fuzzy Sets and Systems; 13;1-10 (1984).

8) 白石，古田，橋本 : システムと制御; 28; 7; 475-482 (1984).

9) 久米，馬野 : 第29回あいまい科学研究会 (1985).

ファジィシステムにおける随伴性と双対性

和泉 弘二 （阪南大学 商学部）
田中 英夫 （大阪府立大学 工学部）
浅居 喜代治 （大阪府立大学 工学部）

1. はじめに

本報告では，完備束半群および双対完備束半群においてそれぞれ2種類の随伴的なファジィシステムを取り扱い，これらの合計4種類のファジィシステムの逆問題および同定問題を考察する。その際，Gentzenによる直観主義論理計算LJに双対な論理計算DLJを導入することにより，逆問題および同定問題の解法が統一的に取り扱えることを示す。

2. 準 備

[定義1] 完備束 L ; 完備束半群

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ L ; 乗法演算 $*$ に関する半群であり,

$$\left.\begin{aligned} a*(\vee b_i) &= \vee(a*b_i) \\ (\vee a_i)*b &= \vee(a_i*b) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$0*a = a*0 = 0 \quad (2)$$

$$I*a = a*I = a \quad (3)$$

を満たす。ただし, 0 ; 最小元, I ; 最大元

[定義2] 完備束 $L^{(d)}$; 双対完備束半群

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $L^{(d)}$; 加法演算 $\#$ に関する半群であり,

$$\left.\begin{aligned} a\#(\wedge b_i) &= \wedge(a\#b_i) \\ (\wedge a_i)\#b &= \wedge(a_i\#b) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$0\#a = a\#0 = a \quad (5)$$

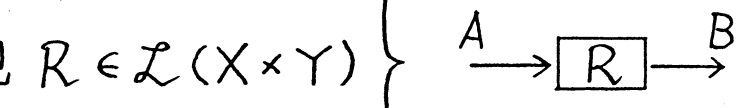
$$I\#a = a\#I = I \quad (6)$$

を満たす。

[注意] 単位区間 $[0,1]$ は完備束半群であり, かつ双対完備束半群である。この場合, 演算 $*$ としては t-ノルム, 演算 $\#$ としては t-コノルム を構成するものが考えられる。

3. 随伴的および双対的なファジィシステム

ファジィ入力 $A \in \mathcal{L}(X)$
システム表現 $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$
ファジィ出力 $B \in \mathcal{L}(Y)$



1) ⓐ-ファジィシステム　$B = A \textcircled{a} R$

$$(A \textcircled{a} R)(y) = \bigvee_{x \in X} [A(x) * R(x, y)] \qquad (7)$$

2) Ⓥ-ファジィシステム　$B = A \textcircled{V} R$

$$(A \textcircled{V} R)(y) = \bigwedge_{x \in X} [A(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y)] \qquad (8)$$

ただし

$$a \overset{*}{\rightarrow} b = \bigvee_{c \in L} \{c \mid a * c \leq b\} \qquad (9)$$

$(a, b \in L)$

双対的に

3) ⓐ-ファジィシステム　$B = A \textcircled{a} R$

$$(A \textcircled{a} R)(y) = \bigwedge_{x \in X} [A(x) \# R(x, y)] \qquad (10)$$

4) Ⓥ-ファジィシステム　$B = A \textcircled{V} R$

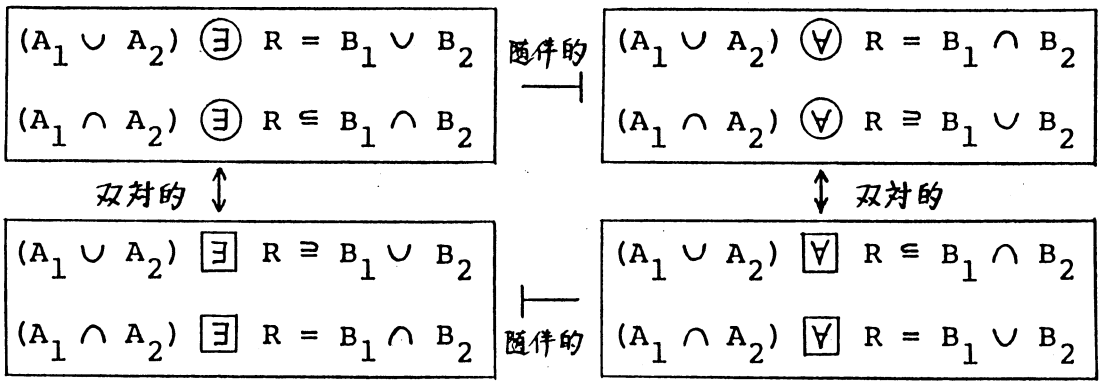
$$(A \textcircled{V} R)(y) = \bigvee_{x \in X} [A(x) \underset{\#}{\leftarrow} R(x, y)] \qquad (11)$$

ただし

$$a \underset{\#}{\leftarrow} b = \bigwedge_{c \in L^{(d)}} \{c \mid a \# c \geq b\} \qquad (12)$$

$(a, b \in L^{(d)})$

これら4種類のファジィシステムにおける随伴性[1]，双対性 および入出力関係は次のように表される。



ただし，各システムにおける ファジィ入力 A_i に対する ファジィ出力を B_i としている。（$i = 1, 2$）

4. 逆問題および同定問題の解法

まず，

$$Q \textcircled{e} R \subseteq T \iff R \subseteq Q^t \textcircled{a} T \qquad (13)$$

$$(Q \in \mathcal{L}(W \times X),\ R \in \mathcal{L}(X \times Y),\ T \in \mathcal{L}(W \times Y))$$

を直観主義論理計算LJの推論規則

$$\frac{Q, R \Rightarrow T}{R \Rightarrow Q \to T} \ (\Rightarrow\to)$$

に置き換えること[1]と同様に，LJに双対な論理計算DLJを導入し，

$$Q \boxminus R \supseteq T \iff R \supseteq Q^t \boxplus T \qquad (14)$$

$$(Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X),\ R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y),\ T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y))$$

をDLJの推論図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{T \Rightarrow Q, R}{T \Rightarrow R, Q}}{Q \leftarrow T \Rightarrow R}}{}\ (\leftarrow \Rightarrow)$$

に置き換えることを提案する。

このようなGentzen流論理計算を用いることにより，逆問題および同定問題は以下のように解くことができる。

[逆問題]

$$\dfrac{\dfrac{A, R \Rightarrow B}{R, A \Rightarrow B}}{A \Rightarrow R \rightarrow B}$$

(㊀-ファジィシステム)

$$\dfrac{B \Rightarrow A \rightarrow R \qquad \dfrac{A \Rightarrow A \quad R \Rightarrow R}{A \rightarrow R, A \Rightarrow R}}{\dfrac{B, A \Rightarrow R}{A \Rightarrow B \rightarrow R}}$$

(Ⓥ-ファジィシステム)

$$\dfrac{B \Rightarrow A, R}{R \leftarrow B \Rightarrow A}$$

(㊁-ファジィシステム)

$$\dfrac{\dfrac{R \Rightarrow R \quad A \Rightarrow A}{R \Rightarrow A, A \leftarrow R} \qquad A \leftarrow R \Rightarrow B}{\dfrac{R \Rightarrow A, B}{B \leftarrow R \Rightarrow A}}$$

(Ⓧ-ファジィシステム)

［同定問題］

$$\frac{Q, R \Rightarrow T}{R \Rightarrow Q \to T} \qquad \frac{T \Rightarrow Q \to R \qquad \dfrac{Q \Rightarrow Q \quad R \Rightarrow R}{Q \to R, Q \Rightarrow R}}{\dfrac{T, Q \Rightarrow R}{Q, T \Rightarrow R}}$$

（㊐－ファジィシステム）　　（Ⓥ－ファジィシステム）

$$\frac{T \Rightarrow Q, R}{\dfrac{T \Rightarrow R, Q}{Q \leftarrow T \Rightarrow R}} \qquad \frac{R \Rightarrow R \quad Q \Rightarrow Q}{R \Rightarrow Q, Q \leftarrow R \qquad Q \leftarrow R \Rightarrow T} \Big/ R \Rightarrow Q, T$$

（回－ファジィシステム）　　（図－ファジィシステム）

例えば，図－ファジィシステムに関する逆問題に対しては，次の定理として言い換えることができる。

［定理］ $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$, $B \in \mathcal{L}^{(d)}(Y)$ に対し，

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{L}^{(d)}(X) \mid A \boxtimes R = B\}$$

とするとき

$$\mathcal{A} \neq \phi \iff \hat{A} = B \boxtimes R^t \text{ が } \mathcal{A} \text{ の最小元}$$

が成立する。

（参考文献）

［1］和泉孔二：“随伴的なファジィシステムとその応用に関する研究”，大阪府立大学博士論文（昭和59年12月）

ファジィ関係方程式の解集合を変えない係数行列の集合について

宮腰政明　　新保　勝　（北海道大学工学部）

1．まえがき

与えられた定数ベクトル$b = [b_i]$（$1 \geqq b_1 > b_2 > \cdots > b_n > 0$）と係数行列$A = [a_{ij}]$（$i = 1, \cdots, n$；$j = 1, \cdots, m$）に関するシンプル・ファジィ関係方程式[1)3)]（1）を考える。

$$x \circ A = b \qquad \text{但し、} x = [x_i] \qquad (1)$$

ここでは、解集合$\mathcal{X}$（式（1）を満足するベクトルxの全体）と同じ解集合を与える方程式$x \circ A' = b$の係数行列A'が満足すべき条件を示し、解集合を変えない係数行列の集合の性質を明らかにする。更に、同じ次数（n，m）で、解をもつすべてのシンプル・ファジィ関係方程式（以下、方程式という）の相異なる解集合の数は同じであることを示す。

尚、本稿で引用する補題、定理の証明は文献（4）に示しているので省略する。

2．解集合の特性行列

二つの方程式

$$x \circ A_1 = b \text{（解集合 } \mathcal{X}^{(1)}\text{）} \qquad x \circ A_2 = b \text{（解集合 } \mathcal{X}^{(2)}\text{）}$$

の解集合が等しいための条件は

$$\left.\begin{array}{l} (A_1 \otimes b^{-1})^{-1} = (A_2 \otimes b^{-1})^{-1} \\ \mathcal{X}_0^{(1)} = \mathcal{X}_0^{(2)} \quad (\mathcal{X}_0^{(i)} \text{は } \mathcal{X}^{(i)} \text{の極小解[2)]の全体}) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

であることは明らかである。

一つの方程式の極小解の集合を特徴づけるものとしては方程式の特性行列とその保存路[3)]（conservative way）が知られている。しかし、これらは複数の方程式間の極小解の同値性を保証するものとしては不十分であり、本稿では、修正された極小解の集合の特性行列を用いる。また、最大解[1)]に対する特性行列も導入して、式（2）に対応した、最大解と極小解の特性行列を用いた表現である基本的な定理1を得る。

2．1　最大解の特性行列

定義1：最大解の特性行列$\hat{D}(A)$

$D(A) = [d_{ij}]$；　$a_{ij} > b_j$ のとき、$d_{ij} \triangleq 1$，

その他のとき、　$d_{ij} = 0$．

$\hat{D}(A) = [\hat{d}_{ij}]$；　$d_i = 0)$のとき、　$\hat{d}_{ij} = 0$　$(j=1,\ldots,m)$

$d_i \neq 0)$かつ$j \neq j(i) \triangleq \max\{j \mid d_{ij} = 1\}$ のとき、　$\hat{d}_{ij} \triangleq 0$

$d_i \neq 0)$かつ$j = j(i)$のとき、　$\hat{d}_{ij} = 1$

但し、d_i は$D(A)$の第i行ベクトル、$0)$はm次行ベクトルを表わす。

補題2．1

i）　$A \otimes b^{-1} = D(A) \otimes b^{-1} = \hat{D}(A) \otimes b^{-1}$

ii）　$A_1 \otimes b^{-1} = A_2 \otimes b^{-1} \longleftrightarrow \hat{D}(A_1) = \hat{D}(A_2)$

2．2　極小解の集合の特性行列

定義2：Boolean 行列Hの保存路の集合W（H）と行列H

行列の要素の値が0または1である行列をBoolean 行列（以下、B行列）という。B行列Hの保存路の全体の集合をW（H）で表わす。このとき、新しいB行列$\hat{H}=[\hat{h}_{ij}]$を

$\wp_j = i_j$ となる$\wp \in W(H)$が存在するとき、　$h_{ij\,j} \triangleq 1$

その他のとき、　$h_{ij} \triangleq 0$

と定義する。

補題2．2

HをB行列とするとき、

i)　$W(H) = W(\hat{H})$

ii)　$\hat{H} = \hat{\hat{H}}$

定義3：極小解の特性行列$\hat{C}(A)$

$C(A)=[c_{ij}]$を

$a_{ij} \geqq b_j$ かつ $b_j \leqq ((A \otimes \wp b^{-1})^{-1})_i$ のとき、　$c_{ij} \triangleq 1$

その他のとき、　$c_{ij} \triangleq 0$

と定義する。このとき、$\hat{C}(A)$を方程式（1）の極小解の集合の特性行列という。

注）　$C(A) \geqq \hat{C}(A)$，$W(C(A)) = W(\hat{C}(A))$，

$\hat{C}(A) = \hat{\hat{C}}(A)$

定義4：　$\mathcal{H}(n,m)$と$\mathcal{H}_0(n,m)$

$\mathcal{H}(n,m) \triangleq$各列に少なくとも一つの‘1’をもつ（n，m）次のB行列の全体

$\mathcal{H}_0(n,m) \triangleq \{H \mid H=\hat{H}$　かつ　$H \in \mathcal{H}(n,m)\}$

$\mathcal{H}(n,m)$上の同値関係÷を、H'、$H'' \in \mathcal{H}(n,m)$に対し

$H' \div H'' \longleftrightarrow \hat{H}' = \hat{H}''$

と定義すると　$\mathcal{H}_0(n,m)$と　$\mathcal{H}(n,m)/\div$　は同等である。

$\mathcal{H}(n,m)$の要素数は$(2^n-1)^m$であるが本質的に相異なる保存路の集合をもつ$\mathcal{H}(n,m)$の要素数は　$\mathcal{H}_0(n,m)$の要素数に等しい。

定義5：　$\mathcal{J}$上の同値関係≡

$I \triangleq \{1,2,\ldots,n\}$，$\mathcal{J} \triangleq \overbrace{I \times I \cdots \times I}^{m}$

$\wp \triangleq (i_1, i_2, \ldots, i_m)$

$i \in \{\wp\} = \{i_1, \ldots, i_m\}$に対し、$J_\wp(i) \triangleq \{j \mid i_j = i\}$

とするとき

$\wp_1 \equiv \wp_2 \longleftrightarrow$　i)　$\{\wp_1\} = \{\wp_2\}$

ii)　$i \in \{\wp_1\}$に対し、$\min J_{\wp_1}(i) = \min J_{\wp_2}(i)$

≡による$\mathcal{H}$、W（H）上の商集合を各々$\mathcal{H}/\equiv$、$W(H)/\equiv$とする。

補題２．３

i) $\mathfrak{K}(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{K}(\mathfrak{P}_2) \longleftrightarrow \mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{P}_2$

ii) W（H）／≡ の一つの同値類がHの保存路を含めば、それは唯一つの保存路を含む。

極小解の集合の同値性を保証するものとしては $\mathcal{H}_0$（n，m）だけでは不十分であり、$\mathcal{J}$ 上の同値関係≡ が必要となる。実際、極小解の特性行列 $\hat{C}$（A）は、次で定義される $\mathcal{H}_0$（n，m）／≡ の一つの同値類に対応している。

定義６：　$\mathcal{H}$（n，m）上の同値関係≡

$$H' \equiv H'' \longleftrightarrow \{J \mid J \in \mathcal{J}/\equiv \text{ かつ } J \cap W(H') \neq \phi\} = \{J \mid J \in \mathcal{J}/\equiv \text{ かつ } J \cap W(H'') \neq \phi\}$$

注）　$H' \equiv H'' \longleftrightarrow \hat{H}' \equiv \hat{H}''$

定理１

二つの方程式

$\mathfrak{K} \circ A_1 = \mathfrak{b}$（解集合 $\mathcal{Z}^{(1)}$）と　$\mathfrak{K} \circ A_2 = \mathfrak{b}$（解集合 $\mathcal{Z}^{(2)}$）に対し、

$\mathcal{Z}^{(1)} = \mathcal{Z}^{(2)} \longleftrightarrow \hat{D}(A_1) = \hat{D}(A_2)$　かつ　$\hat{C}(A_1) \equiv \hat{C}(A_2)$

３．解集合を変えない係数行列

方程式（１）の最大解、極小解の集合の特性行列を各々 $\hat{D}$（A），$\hat{C}$（A）とする。

定義７：　$\hat{D}$（A）と両立するB行列H

i)　$H \geqq \hat{D}(A)$

ii) $\hat{d}_i \neq 0$）（$\hat{d}_{i\mu} = 1$）のとき、$j < j(i)$ に対し、$h_{ij} = 0$

なるHを $\hat{D}$（A）と両立するという。

$\mathcal{H}(\hat{D}(A)) \triangleq \hat{D}(A)$ と両立する $\mathcal{H}$（n，m）の要素の全体

$\mathcal{H}(\hat{C}(A)) \triangleq \hat{C}(A)$ を含む $\mathcal{H}$（n，m）／≒ の同値類

$\mathcal{H}(\hat{D}(A), \hat{C}(A)) \triangleq \mathcal{H}(\hat{D}(A)) \cap \mathcal{H}(\hat{C}(A))$

とするとき、B行列 $H \in \mathcal{H}(\hat{D}(A), \hat{C}(A))$ に対し、次の条件を満足する行列を $A^*_H = [a^*_{ij}]$ とかく。

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{i)} \ \hat{d}_i = 0) \text{のとき、} & h_{ij} = 1 \text{に対し、} a^*_{ij} = b_j \\
& h_{ij} = 0 \text{に対し、} a^*_{ij} < b_j \\
\text{ii)} \ \hat{d}_i \neq 0) \ (\hat{d}_{i\mu(i)} = 1) \text{のとき、} & \\
j = j(i) \text{に対し、} & a^*_{ij} > b_j \\
j > j(i) \text{かつ} h_{ij} = 1 \text{に対し、} & a^*_{ij} = b_j \\
j > j(i) \text{かつ} h_{ij} = 0 \text{に対し、} & a^*_{ij} < b_j \\
j < j(i) \text{に対し、} & a^*_{ij} = \text{任意}
\end{array}\right\} \quad (3)$$

補題３．１

$H \in \mathcal{H}(\hat{D}(A), \hat{C}(A))$ に対し

i) $\hat{D}(A^*_H) = \hat{D}(A)$

ii) $(A^*_H \otimes \mathfrak{b}^{-1})^{-1} \circ A^*_H = \mathfrak{b}$

iii) $H = C(A^*_H)$

iv) $\hat{C}(A) = \hat{C}(A^*_H)$

定理２

$H \in \mathcal{H}(\hat{D}(A), \hat{C}(A))$ に対し、方程式 $\mathfrak{x} \circ A^*_H = \mathfrak{b}$ の解集合 $\mathfrak{X}^*$ は空ではなく、$\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}$ となる。

補題３．２

i) $H_1, H_2 \in \mathcal{H}(\hat{D}(A), \hat{C}(A))$ で、$H_1 \neq H_2$ ならば、

$$\mathfrak{A}^*(H_1) \cap \mathfrak{A}^*(H_2) = \emptyset$$

ii) $H \in \mathcal{H}(\hat{D}(A), \hat{C}(A))$ に対し、$\mathfrak{A}^*(H)$ は $\vee$、$\wedge$ に関して束となる。

但し、$\mathfrak{A}^*(H)$ は、H に対し条件（３）を満足する係数行列の全体。

定理３

方程式（１）の解集合と同じ解集合を与える係数行列の全体の集合を $\mathfrak{A}$ とすれば

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\substack{\hat{C}(A) \equiv H_0 \\ H_0 \in \mathcal{H}_0(n,m)}} \left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}(\hat{D}(A), H_0)} \mathfrak{A}^*(H) \right) \qquad (4)$$

となる。

定義８：　$H \in \mathcal{H}(\hat{D}(A), \hat{C}(A))$ に対するパターン $P(H)$

$P(H) = [p_{ij}]$ は＋、＝、－、＊の四つの記号を値としてもつ行列で、各要素の値は次のように決められる。

i) $\hat{d}_i = 0$ のとき、　$h_{ij} = 1$ に対し、　$p_{ij} \triangleq$ '='

$h_{ij} = 0$ に対し、　$p_{ij} \triangleq$ '－'

ii) $\hat{d}_i \neq 0$ （ $\hat{d}_{ij(i)} = 1$ ）のとき

$j = j(i)$ に対し、　$p_{ij} \triangleq$ '+'

$j > j(i)$ かつ $h_{ij} = 1$ に対し、　$p_{ij} \triangleq$ '='

$j > j(i)$ かつ $h_{ij} = 0$ に対し、　$p_{ij} \triangleq$ '－'

$j < j(i)$ に対し、　$p_{ij} \triangleq$ '*'

従って、$\mathfrak{A}^*(H)$ には一つのパターン $P(H)$ が対応する。

4．解集合の同等性

$\mathcal{B}_m = \{ \boldsymbol{b} \mid 1 > b_1 > b_2 > \cdots > b_m > 0 \}$ とする。

定数ベクトル $\boldsymbol{b}_1$ 、$\boldsymbol{b}_2 \in \mathcal{B}_m$ に対する二つの方程式

$$\boldsymbol{x} \circ A_1 = \boldsymbol{b}_1 \qquad \boldsymbol{x} \circ A_2 = \boldsymbol{b}_2$$

の係数行列 A_1 ，A_2 を解集合が存在する範囲で任意に変えたときに生じる相異なる解集合の個数は等しいことが定理３の結果から導かれる。

ここでは、シンプルな方程式の全体を考えるので（A，$\boldsymbol{b}$），（$\boldsymbol{b}$）等の引数をつけて記号を再表現する。

$\hat{D}$（A，$\boldsymbol{b}$）$\triangleq$ 方程式 $\boldsymbol{x} \circ A = \boldsymbol{b}$ の最大解 $(A \otimes \boldsymbol{b}^{-1})^{-1}$ の特性行列

C（A，$\boldsymbol{b}$）$\triangleq$ 〃 の極小解の集合の擬特性行列

$\hat{C}$（A，$\boldsymbol{b}$）$\triangleq$ 〃 の特性行列

$\mathcal{X}$（A，$\boldsymbol{b}$）$\triangleq$ 方程式 $\boldsymbol{x} \circ A = \boldsymbol{b}$ の解集合

$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}) \triangleq \mathcal{X}(A, \boldsymbol{b}) \neq \Omega$ なる係数行列の全体

$\mathcal{X}(\boldsymbol{b}) \triangleq \{ \mathcal{X}(A, \boldsymbol{b}) \mid A \in \mathcal{A}(\boldsymbol{b}) \}$

定義９：　$\mathcal{A}(\boldsymbol{b})$ 上の同値関係 $\simeq$

A_1 ，$A_2 \in \mathcal{A}(\boldsymbol{b})$ に対し、

$$A_1 \simeq A_2 \longleftrightarrow \mathcal{X}(A_1, \boldsymbol{b}) = \mathcal{X}(A_2, \boldsymbol{b})$$

補題４．１

i）任意の $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}_m$ に対して、$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}) \neq \Omega$

ii）$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}) / \simeq$ と $\mathcal{X}(\boldsymbol{b})$ は同等である。

$A \in \mathcal{A}(\boldsymbol{b})$ に対し、Aを含む $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}) / \simeq$ の同値類を $[A, \boldsymbol{b}]$ とすれば、式（４）は

$$[A,\boldsymbol{b}] = \bigcup_{\substack{\hat{C}(A,\boldsymbol{b}) \equiv H_0 \\ H_0 \in \mathcal{H}_0(n,m)}} \left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}_*(\hat{D}(A,\boldsymbol{b}), H_0)} \mathcal{A}^*(H) \right) \qquad (5)$$

と表わされる。

定義１０：　$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) / \simeq$ から $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2) / \simeq$ への写像 F

$\mathcal{P}([A, \boldsymbol{b}])$ を $[A, \boldsymbol{b}]$ に対応したパターンの集合とするとき、

写像 F：　$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) / \simeq \rightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2) / \simeq$

を、もし、$\mathcal{P}([A_1, \boldsymbol{b}_1]) = \mathcal{P}([A_2, \boldsymbol{b}_2])$ ならば、

$F([A_1, \boldsymbol{b}_1]) = [A_2, \boldsymbol{b}_2]$ と定義する。

補題４．２

Fは全単射である。

定理４

任意の $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \mathcal{B}_m$ に対し、$|\mathcal{X}(\boldsymbol{b}_1)| = |\mathcal{X}(\boldsymbol{b}_2)|$

である。

注）$1 = b_1$ なる定数ベクトルの集合についても同じことが成り立つ。

5．解集合の数え上げ

定理１を直接用いて相異なる解集合の数え上げを行なう。

（n，m）次のB行列で、各行が高々一つの‘1’しかもたないものの全体を$\mathcal{Q}(n, m)$とする。

アルゴリズム

i) 準備として、$\mathcal{H}(n, m)$，$\mathcal{H}_0(n, m)$，$\mathcal{H}_0(n, m)/\equiv$のリストをつくる。

ii) $D \in \mathcal{Q}(n, m)$を適当にとり、$\mathcal{H}(D) \triangleq \{H \mid H$はDと両立する$\mathcal{H}(n, m)$の要素$\}$を生成する。

iii) $H \in \mathcal{H}(D)$に対し、$\hat{H}$を含む$\mathcal{H}_0(n, m)/\equiv$の相異なる要素数$\nu(D)$を数え上げる。

iv) ii)、iii)を反復する。

v) $\mathcal{Q}(n, m)$が空になったら、$\nu(D)$の総和をとる。

このアルゴリズムを小さな次数に適用した結果を表１に示す。

表　１．相異なる解集合の数（括弧内の数は$1 = b_1$に対する数）

n \ m	1	2	3	4
2	8(3)	28(11)	60(23)	104(39)
3	26(7)	248(73)	1316(379)	4958(1357)
4	80(15)	1936(419)	25152(5387)	

6．あとがき

現在、任意次数に対する相異なる解集合の個数を与える公式は得られていない。この公式を導出することは意味あることと思われる。また、定数ベクトルのシンプル性の条件を除いた一般の方程式に対し本稿の方法を拡張していくことが今後の課題である。

参考文献

1) Sanchez, E.: Information and Control; 30; 38-48 (1976).

2) Czogala, E., J. Drewniak and W. Pedrycz: Fuzzy Sets and Systems ; 7; 1; 89-101 (1982).

3) Wang Peizhuang, S. Sessa, A. di Nola and W. Pedrycz: BUSEFAL ; 18; 67-74 (1984).

4) Miyakoshi, M. and M. Shimbo: Sets of Solution-Set-Invariant Coefficient Matrices of Simple Fuzzy Relation Equations; submitted to Fuzzy Sets and Systems.

Ｆｕｚｚｙ論理文による
あいまい情報の表現と近似

武田明秀　　向殿政男
（㈱　ソフトピア）　　（明治大学工学部）

§１　　はじめに

現在、知識工学、及び、エキスパートシステムなど、様々な分野において、知識、概念をコンピュータシステム中で、適切な形で取り扱えるよう、研究が進められているが、ところが、実際、我々の日常もっている概念のほとんどは、確実に定義できることは稀で、あいまいな、あるいは、定量的評価が困難であるときが多いので、あいまい情報を、一般的枠組みのなかで取り扱うことのできる手法が、望まれている。
そこで、ここでは、実社会に存在するあいまいな情報を、コンピュータシステム内で表現する一手法として、Ｆｕｚｚｙ論理文と呼ばれる文を用いる方法を考察する。
簡単に述べれば、概念は、ある対象領域Ｘ上のあいまい（Ｆｕｚｚｙ）集合で表現できるという単純な仮定の下、有限個の基本単語（これらも、Ｆｕｚｚｙ集合で表現されている）を、いくつかの論理結合子によって組み合わせ、文（これを、Ｆｕｚｚｙ論理文という）を構成し、与えられた任意の概念を近似表現する手法である。これは、Ｘ上の概念は無限個あり得るが、良く利用され共通になっている概念のみが単語として名前がつけられていて、このように我々が利用できる単語は、有限であるという考え方に基づいている。あいまい情報を、既に定義されている有限個の単語の組み合わせで近似表現することは、物理的制約のある実際のコンピュータシステム上であいまい情報を取り扱う上で必要なことであると同時に、このＦｕｚｚｙ論理文の理論的性質が明らかになっていれば、その処理の意味付けもしやすくなると考えられる。
本報告では、Ｆｕｚｚｙ論理文と呼ばれる簡単な論理式の定義、そして、Ｆｕｚｚｙ集合として与えられた概念を、ある評価基準に従い、基本単語の組み合わせで近似し、それを表わすＦｕｚｚｙ論理文を求める手順について述べる。

§２　　Ｆｕｚｚｙ論理文

Ｘを対象領域（通常の２値集合）とし、Ａ１，…，Ａｎ をＸ上のＦｕｚｚｙ集合として、これらを基本単語と呼ぶ。これは、有限個であり、このときＦｕｚｚｙ論理文はつぎのように定義される。

定義１

(1)　Ａ１，…，Ａｎ はＦｕｚｚｙ論理文である。
(2)　ｆ１，ｆ２がＦｕｚｚｙ論理文ならば、（ｆ１＋ｆ２）、および（ｆ１・ｆ２）もＦｕｚｚｙ論理文である。
(3)　ｆがＦｕｚｚｙ論理文ならば、（～ｆ）もＦｕｚｚｙ論理文である。
(4)　(1)、(2)、(3) で与えられるものだけがＦｕｚｚｙ論理文である。

この定義で、論理結合子　＋（ＯＲ）、・（ＡＮＤ）、及び、～（ＮＯＴ）は、次のように定義される。

$\mu_{A \vee B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$、

$\mu_{A \cdot B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$、

$\mu_{\sim A}(x) = 1 - \mu_A(x)$、　　$x \in X$.

ここで、μ_A はＦｕｚｚｙ集合Ａのメンバーシップ関数で、$\mu_A(X) \in [0, 1]$ である。なお、これより簡単のため、Ｆｕｚｚｙ集合とメンバーシップ関数とを同一視して、$\mu_A(x)$ のかわりにＡ（ｘ）と書くことにする。また、Ｆｕｚｚｙ論理文は、Ｘ上の一つのＦｕｚｚｙ集合を表わしている。但し、このＦｕｚｚｙ論理文で表現されるＦｕｚｚｙ集合の数は、有限である。

［例］

図１に示すように、Ｘ上の基本単語、Ａ１，Ａ２，Ａ３がある時、例えばＦｕｚｚｙ論理文、Ｆ＝Ａ１＋（Ａ２・（～Ａ３））は、太線で示されるＸ上のＦｕｚｚｙ集合Ａ’を表わしている。また、ここではＸを年齢とし、Ａ１を若い、Ａ２を中年、Ａ３を年寄りという基本単語に対応付けてみれば、Ｆは『若い、或いは（中年で、且つ年寄りでない）』というＦｕｚｚｙ集合表現をしていることになる。

§３　　Ｆｕｚｚｙ論理文で表現できるための必要十分条件

Ｘ上のあるＦｕｚｚｙ集合Ａが、Ｆｕｚｚｙ論理文で表現できるための必要十分条件は既に求められている[2]。

定理１

(1)　Ｆｕｚｚｙ集合Ａの値は、各セル空間で、Ａｉ，～Ａｉ，又は、０，１のいずれかに等しい。

(2)　Ａの値は、各セル空間の境界において連続である。

ここで、セル空間とは、基本単語からなる、Ａ１，…，Ａｎ，～Ａ１，…，～Ａｎ，０，１　が大きさのある順番を保持している［０，１］^{n} 上の部分集合

$$0 \leqq A_{i_1} \leqq \cdots \leqq A_{i_n} \leqq \sim A_{i_n} \leqq \cdots \leqq \sim A_{i_1} \leqq 1 \quad \cdots ①$$

（A_{i_j} は、A_{ij}、又は～A_{ij}、をあらわす）

のことであり最大で、$2^n \times n!$ 個存在する。

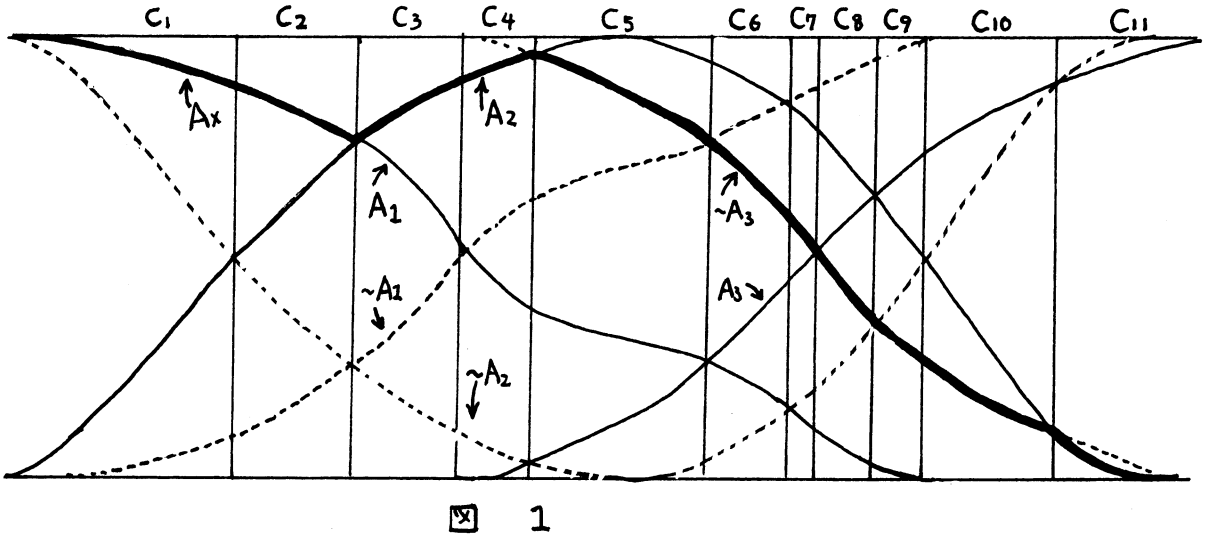


図　１

図１では、セル空間は１１個ある。以下に、各セル空間に対応した①式を示したが、式のうち、右半分、つまり、１／２から１の間にあるリテラル（基本単語、又はその否定）だけを示した。この理由は、左半分は右半分の順序をそのまま反対にしているだけなので、リテラルの順序関係は、右半分だけで表示できるからである。　なお、…以後のリテラルはそのセル空間でとるリテラルを示しており、Type 1，Type 0はおのおの、このリテラルが右半分に含まれるか、あるいは左半分に含まれるかを示している。

C1	:	１／２≦～A2 ≦ A1 ≦～A3 ≦１，	… A1	Type 1
C2	:	１／２≦ A2 ≦ A1 ≦～A3 ≦１，	… A1	Type 1
C3	:	１／２≦ A1 ≦ A2 ≦～A3 ≦１，	… A2	Type 1
C4	:	１／２≦～A1 ≦ A2 ≦～A3 ≦１，	… A2	Type 1
C5	:	１／２≦～A1 ≦～A3 ≦ A2 ≦１，	… ～A3	Type 1
C6	:	１／２≦～A3 ≦～A1 ≦ A2 ≦１，	… ～A3	Type 1
C7	:	１／２≦～A3 ≦ A2 ≦～A1 ≦１，	… ～A3	Type 1
C8	:	１／２≦ A3 ≦ A2 ≦～A1 ≦１，	… ～A3	Type 0
C9	:	１／２≦ A2 ≦ A3 ≦～A1 ≦１，	… ～A3	Type 0
C10	:	１／２≦～A2 ≦ A3 ≦～A1 ≦１，	… ～A3	Type 0
C11	:	１／２≦ A3 ≦～A2 ≦～A1 ≦１，	… A2	Type 0

§４　　Ｆｕｚｚｙ論理文による表現

前章で示した定理１の２条件(1),(2) を満たすＦｕｚｚｙ集合Ax が与えられたとき、Ax を表現するＦｕｚｚｙ論理文は、つぎのようにして構成できる。
『各セル空間Ｃｉにおいて、Ax のとる値をA'ｉ　とする。Ｃｉの表現①において、A'ｉ　を含めて、これより右に配列されているリテラルのすべてのＡＮＤ（・）からなる積項をαｉとする。この時

$$Ax = \bigvee_{i} \alpha i$$

が成立する。』
図１の例でＦは、先の２条件を満たしており、次のようになる。

Ax ＝A1 ・～A3 ＋A1 ・～A3 ＋A2 ・～A3 ＋A2 ・～A3 ＋
～A3 ・A2 ＋～A3 ・～A1 ・A2 ＋～A3 ・A2 ・～A1 ＋
～A3 ・A3 ・A2 ・～A1 ＋～A3 ・A2 ・A3 ・～A1 ＋
A2 ・A3 ・～A2 ・～A1

更に、これを最簡化すると、Ax ＝A1 ＋（A2 ・（～A3 ））となる。
基本単語が３個の場合、セル空間の数は最大、$2^3 \times 3! = 48$個存在するはずで、残りの３７個のセル空間のうち、いくつかの値は未定義となっている。従って、以上の表現は、不完全指定されたＦｕｚｚｙ論理関数の表現[3]、と一致する。

§5　　Ｆｕｚｚｙ論理文によるあいまい情報の近似

これまで述べたようにＦｕｚｚｙ論理文は、有限個の基本単語の組み合わせで、かつかくセル空間でどれかの基本単語の値と一致しなければならないが、任意の概念がこのラインと一致するとは必ずしも限らないので、両者間で近似をとる必要がある。ここでは、その手法について述べる。
まずあるセル空間Ｃｉにおいて、近似すべき対象となるＦｕｚｚｙ集合をＡｘとする。基本単語A'_{ij}(j=1, …,2n)とこのＡｘとの近似度の評価基準は幾通りかあり得るが、ここでは極めて簡単化して、境界におけるメンバーシップ関数の値の差の平均値を、１から減じた値をＣｉにおける近似度ａ　とする。即ち、

$$a_{ij} = 1 - 1/2 \{ | \mu_{A'_{ij}}(d_i-1) - \mu_{Ax}(d_i-1) | + | \mu_{A'_{ij}}(d_i) - \mu_{Ax}(d_i) | \}$$

ここで、d_i, d_{i-1}は境界のＸ軸の値である。

とする。次に、Ａｘと、セル空間の間で連続な基本単語によってできる、Ｆｕｚｚｙ論理文との評価基準も幾通りかあり得るが、ここでは今述べた各セル空間における近似度a_{ij}の最小値

$$\min\ (a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{mj})$$

を採用する。なお、ｍはセル空間の数。
このような評価基準に基づいて近似度を行列によって表現すると

$$C_i = \begin{array}{c|cccccc} & A'_{i1} & A'_{i2} & \cdots & A'_{ij} & \cdots & A'_{i2n} \\ A'_{i1} & a_{i1} & & & & & \\ A'_{i2} & & a_{i2} & & \varnothing & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ A'_{ij} & & & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ A'_{i2n} & & \varnothing & & & & a_{i2n} \end{array}$$

但し、$C_i = \{C_{pq}\}$　　$C_{pp} = a_{ip}$, p=1,2,…, 2n
$C_{pq} = 0$, $(p \neq q)$
となる。

また、基本単語のセル空間間における接続関係も行列で表現すると、この場合二通りあり、つぎのようになる。

i)　セル空間の境界で、あるＦｕｚｚｙ集合A'_{ij}と、その否定$\sim A'_{ij}$とが交差している場合。

ii)　ある二つ以上のＦｕｚｚｙ集合A'_{ij}，A'_{ik}（A'_{ij}，A'_{ik}はそれぞれ異なる基本単語のＦｕｚｚｙ集合）が交差している場合。

i）の場合

A'_{ij}がｓ、$\sim A'_{ij}$がｔ行（列）にあったとすると

$T_{i,i+1} = T_{s,t} =$

	A'_{i1}	⋯	s	⋯	t	⋯	A'_{i2n}
A'_{i1}	1						
⋮							
s			1		1		
⋮							
t			1		1		
⋮							
A'_{i2n}							1

となる。

ii）の場合

A'_{ij}がｓ、A'_{ik}がｔ、$\sim A'_{ij}$がｕ、$\sim A'_{ik}$がｖ行（列）におのおのあったとすると

$T_{i,i+1} = T_{s,t} \vee T_{u,v} =$

	A'_{i1}	⋯	s	⋯	t	⋯	u	⋯	v	⋯	A'_{i2n}
A'_{i1}	1										
⋮											
s			1		1						
⋮											
t			1		1						
⋮											
u							1		1		
⋮											
v							1		1		
⋮											
A'_{i2n}											1

となる。

そこで、つぎの演算をおこなう。

$$A = C_1 \cdot T_{1,2} \cdot C_2 \cdot T_{2,3} \cdot \cdots C_{m-1} \cdot T_{m-1} \cdot C_m$$

但し、行列の掛け算　Ａ・Ｂ＝Ａ’は

$$a'_{ij} = \bigvee_{k=1}^{2n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \{\vee はＯＲ、\cdot はＡＮＤ\}$$

最終的な解Ａの要素a_{ij}は、最初のセル空間Ｃ１でｉ番目の基本単語を選択し、最後

のセル空間Ｃｍ では　ｊ番目の基本単語を採用したとした時のＦｕｚｚｙ論理文の近似度の最大値を意味している。従って、Ａの要素のうちの最大値をとって、それが$a_{s,t}$であるならば、Ｃ１ でＳ 番目で始まり、Ｃｍ でｔ 番目で終わる基本単語の軌跡を求めればよく、その近似度は$a_{s,t}$となる。
実際には、行列をすべて計算しなくても、接続関係のある近似度行列の要素に対して計算を施せばよく、更にアルゴリズムを高速化できる。

§６　　まとめ

以上述べたような手法により、あいまいな任意の概念が一つのＦｕｚｚｙ集合で与えられれば、これを有限個の基本単語の組み合わせで構成されたＦｕｚｚｙ論理文により近似表現することができる。引き続き、Ｆｕｚｚｙ論理文をＦｕｚｚｙ推論、データベースの検索などに適用したいと考えている。

§７　　参考文献

[1]　M.Mukaidono ： Towords an Approximate Representation of Concepts with Fuzzy Logic Sentences

Int. Conf. On Policy Analysis and Information Systems, 1981, Taipei

[2]　M.Mukaidono ： A Necssary and Sufficient condition for Fuzzy Logic Functions

9-th Int. Symp. On Multiple-Valued Logic, 1979, IEEE

[3]　藤井、向殿 ： 不完全指定されたＦｕｚｚｙ論理関数の表現

昭和５７年度電子通信学会総合全国大会、１２２１

[4]　向殿、武田 ： Ｆｕｚｚｙ論理文によるあいまい情報の表現

昭和５９年度情報処理学会秋期全国大会、１１８５

[5]　向殿、武田 ： Ｆｕｚｚｙ論理文によるあいまい情報の近似

昭和６０年度情報処理学会前期全国大会、８７３

ファジィ推論の高速演算

福井県立短大経営学科　　塚本弥八郎

1　はじめに

ファジィ推論については、すでに多くの考え方や方法が提案されてきた。[1,2,3]
本論では、ファジィ集合を規定するメンバーシップ関数の量子化を経ないで、いくつかのパラメータを使って素早く推論 を行なう手法について述べる。その基本的枠組は、既に R.M.Clouaire [4] によって与えられているが、さらに改善を加え、実際にパソコン上で演算させた結果を示し、最後に本方法の特徴についてまとめる。

2　仮定と基本式

いま、D,P,Q,C等をファジィ命題に述べられたファジィ集合とする。
(D, P→Q)⇒C　と記述されるファジィ推論をつぎの仮定の下で考える。

A1. 推論方式は直接法でMAX－MIN合成に基ずく
A2. 含意(→)はGödelの定義による
A3. 前提で与えられるファジィ集合はどれも4個のパラメータで直線的に特定化される。

DとPを、Uを全体集合とするファジィ集合，QとCを、Vを全体集合とするファジィ集合とする。このとき、上の仮定より推論の基本式はつぎのように書ける。(A1)

$$C = D \circ R_{P \to Q} \qquad \text{---------- (1)}$$

ただし，Rはつぎの定義に従う。(A2)

$$\forall_{(u,v)\in U\times V} : \mu_R(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu_P(u) \le \mu_Q(v) \\ \mu_Q(v) & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{-- (2)}$$

また、P，Q，Dのメンバーシップ関数は

$$P = (P_1, P_2, P_3, P_4), \quad P_3, P_4 > 0 \qquad \text{---------- (3)}$$

のように表わされ，図1のメンバーシップ関数を意味するものとする。(A3)

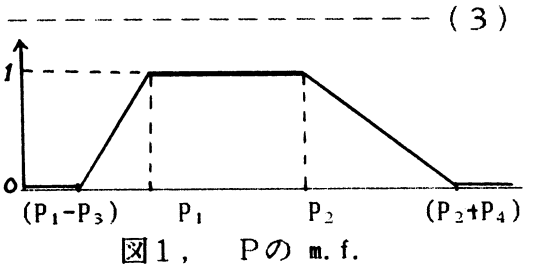


図1，　Pの m.f.

3　アルゴリズム

P，Q，Dが図1のように与えられるとき、推論結果としてのCは、(1)式を直接適用せずに、以下のように5通りの場合について考えれば十分である。
はじめに、三つのパラメータα，β，γ をつぎのように定める。

$$\alpha = \begin{cases} \mu_D(P_1 - P_3) \vee \mu_D(P_2 + P_4) & \text{if } D_1 < P_2 + P_4 \text{ and } D_2 > P_1 - P_3 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \cdots (4)$$

$$\beta = \begin{cases} \min_{u \in I} \mu_P(u) & \text{if } \alpha = 0 \\ \max_{u \in I} \mu_P(u) & \text{if } 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad \cdots (5)$$

ただし、

$$I = \left\{ u \in \{(P_1 - P_3,\ P_1) \cup (P_2,\ P_2 + P_4)\} \mid \mu_P(u) = \mu_D(u) \right\} \quad \cdots (6)$$

$$\gamma = \mu_P(D_1) \wedge \mu_P(D_2) \quad \cdots (7)$$

5とおりの場合を記号（ｉ）－（ｖ）によって示す。

$\alpha = 0$ のとき、（ｉ）$I = \phi$ ならば

$$\mu_C(v) = \mu_Q(v) \qquad \text{for each } v \in V \quad \cdots (8)$$

（ii）$I \neq \phi$ ならば

$$\mu_C(v) = \begin{cases} \mu_Q(v) & \text{for } v \in V_1 \\ 1 & \text{for } v \in V_2 \\ \max_{u \in \mu_P^{-1}(\mu_Q(v))} \mu_D(u) & \text{for } v \in V_3 \end{cases} \quad (9)$$

ただし、

$$V_1 = \left\{ v \mid v \leq \min \mu_Q^{-1}(\beta) \right\} \cup \left\{ v \mid v \geq \max \mu_Q^{-1}(\beta) \right\}$$

$$V_2 = (\min \mu_Q^{-1}(\gamma),\ \max \mu_Q^{-1}(\gamma))$$

$$V_3 = V / (V_1 \cup V_2)$$

$0 < \alpha < 1$ のとき、(iii) $P_1 \leq D_1 \leq D_2 \leq P_2$ $(I \neq \phi)$ ならば

$$\mu_C(v) = \begin{cases} \alpha & \text{for} \quad v \in V_4 \\ \mu_Q(v) & \text{for} \quad v \in V_5 \\ \max\limits_{u \in \mu_P^{-1}(\mu_Q(v))} \mu_D(u) & \text{for} \quad v \in V_6 \end{cases} \quad --(10)$$

ただし、

$$V_4 = \{ v \mid v \leq Q_1 - Q_3 \text{ or } v \geq Q_2 + Q_4 \}$$

$$V_5 = V_2, \qquad V_6 = V / (V_4 \cup V_5)$$

(iv) $D_1 < P_1$ or $D_2 > P_2$ のとき、

$$\mu_C(v) = \begin{cases} \alpha & \text{for} \quad v \in V_7 \\ 1 & \text{for} \quad v \in V_8 \\ \max\limits_{u \in \mu_P^{-1}(\mu_Q(v))} \mu_D(u) & \text{for} \quad v \in V_9 \end{cases} \quad --(11)$$

ただし、

$$V_7 = V_4, \quad V_8 = V_2, \quad V_9 = V / (V_7 \cup V_8)$$

(v) $\alpha = 1$ のとき、 $\mu_C(v) = 1$ for $\forall v \in V$ ---- (12)

4 アルゴリズムの証明

前節のアルゴリズムはすべて(1)式に基ずいて導出される。ここではその一部についてのみ証明を与えるが、いずれの場合もつぎのように基本式を書き直しておく。

まず、全体集合Uをつぎの二つにわける。 与えられたある $v \in V$ に対して、

$$U_1 = \{ u \in U \mid \mu_P(u) \leq \mu_Q(v) \}, \qquad U_2 = U / U_1$$

このとき、(1)式は簡単につぎのように書ける。

$$\mu_C(v) = G(v) \vee H(v) \qquad \text{for each } v \in V \quad ----(13)$$

ただし、

$$G(v) = \max_{u \in U_1} \mu_D(u) \quad ---(14), \qquad H(v) = \max_{u \in U_2} (\mu_D(u) \wedge \mu_Q(v)) \quad ---(15)$$

（８）式の導出　　αとＩの定義より、　$\forall u \in U : \mu_D(u) \leq \mu_P(u)$

したがって、(14)と(15)より

$$G \leq \max_{u \in U_1} \mu_P(u) \leq \mu_Q(v), \qquad H \leq \mu_Q(v)$$

よって、(13)より

$$\forall v \in V : \mu_C(v) \leq \mu_Q(v)$$

ここで、真理値限定の考え方を適用すると(8)式を得る。（ＱＥＤ）

同様に(9)式から(12)式までを導くことができるが、紙面の都合で省略する。計算例も含めて発表時に示す。

５　結　び

最後に、本推論方式の特徴についてまとめておく。

（１）　Ｄ＝Ｐ　のとき　Ｃ＝Ｑ　を得る、即ち、前件と同じファジィ集合がデータとしてくると、後件がそのまま出力される。このことは、上の証明において、不等号を等号に代えた場合に対応し、直ちに示される。

（２）　Ｄ⊂Ｐ　のとき　Ｃ＝Ｑ　となる。（１）はこの特殊の場合である。即ち、前件より精度の高い情報を得たとしても後件Ｑが結論される。このことは、ファジィ命題"Ｐ→Ｑ"をあいまいさがそれ以上排除出来ないものとして作成されたと考えれば良いであろう。

（３）　$\alpha = 1$　のとき、即ち、μ_Pが０となるｕで１の値をとるデータに対しては、結果は完全に非制約的となる。

（４）メンバーシップ関数を四つのパラメータで与えることにより、三つの変数α，β，γの５通りの場合を考えるだけで、素早く推論結果を計算し、またパソコンのグラフィック機能を使って、これを容易に図示することができる。

（５）"$P_i \rightarrow Q_i$"，（$i = 1, \cdots, n$）タイプの推論へ拡張するのも容易である。

（６）問題点としては、推論結果Ｃそのものは、もはや四つのパラメータでは表示出来ないケースが一般的である。結果を推論の入力情報として使う場合には、何らかの近似を必要とする。

参考文献

1) L.A.Zadeh, "Fuzzy logic and approximate reasoning", Synthese, 30, 407/428 (1975)
2) J.F.Baldwin, "A model of fuzzy reasoning through multi-valued logic and set theory", Int. J. Man-Machine Studies, 11, 351/380 (1979)
3) 塚本, "あいまい推論", 計測と制御, 22-1 (1983)
4) R.M.Clouaire, "A fast generalized modus ponens", BSEFA (Universite Paul sabatier, France), 18 (1984)

11時20分～11時45分
11時35分～12時

レベルMファジィ集合

東海大学　　中西　祥八郎

1．　はじめに

従来使われて来たファジイ理論は、1つの事象に1つのあいまいさを対応させるメンバーシップ関数によって表現されて来た。しかしながら、現実の世界に、このようなメンバーシップ関数では充分に表現しきれないようなよりあいまいなものが存在する。そこで、このようなよりあいまいな事象を表現する手段の1つとしてタイプMファジイ集合の概念がL.A. Zadehによって提案された。確かに、タイプMファジイ集合は通常のファジイ集合のメンバーシップ関数をファジイ化したファジイグレードによって表現されている点で、よりあいまいな表現を取り扱うのに適していると言える。しかし、タイプMファジイ集合でも、本質的に表現し得るのは1つの事象に対して1つのあいまい性のみである。従って、今までの概念では1つの事象が多くのあいまい性を内包するようなものは表現できない。

L.A. Zadehは１９７５年にレベルMファジイ集合[1]の概念を提唱した。この概念は本質的にはファジイ集合の集まりとして捉える事が出来る。すなわち、1つの事象が多数のあいまい性を内包しているようなあいまい性を表現するのに極めて適している。たとえば、『絵』と言う言葉の中には、色、形、明るさ等のあいまいさが含まれている。このように、多数のあいまい性を同時に表現するものの中で、特に同じ種類のあいまい性のみを一括して表現する多値メンバーシップ関数を取り扱う。この多値メンバーシップ関数によって特性づけられるファジイ集合をレベルMファジイ集合と言う。例えば、『色』という言葉は白、赤、青等の各メンバーシップ関数を要素とする多値メンバーシップ関数によって特性づけられるレベル2ファジイ集合である。即ち、多種のあいまい性を同時に表わすような多値ファジイ集合の中で、その多値ファジイ集合をある同値類で制限したものとしてレベルMファジイ集合を表わす。

本稿では、レベルMファジイ集合を規定する前に、まず最初に多値集合[2]を用いて多値ファジイ集合の概念を導入する。この多値ファジイ集合を特性づけるメンバーシップ関数をMメンバーシップ（Many-Valued Membership Function)関数と呼び、通常のメンバーシップ関数の集まりとして規定する。その後、このMメンバーシップ関数を同値類で制限したものとして多値メンバーシップ関数を定義し、レベルMファジイ集合を導入する。更に、この多値メンバーシップ関数間に種々の関係を導入し、併せてこれらのメンバーシップ関数間に和と積の演算を導入する。これらの演算のもとに、多値メンバーシップ関数はいかなる代数的性質を有するかを考察する。

2．多値ファジイ集合

Xを普遍集合とするとき、ファジイ集合Aとは次のようなメンバーシップ関数μによって完全に特性づけられるXの部分集合である。

$$\mu : X \rightarrow [0, 1]$$

通常、ファジイ集合を取り扱うとき、そのファジイ集合は何らかのあいまいさを示している。本稿では、同時に多数のメンバーシップ関数を取り扱うので、各メンバーシップ関数が如何なるあいまい性を表わしているのかを明

確にする必要がある。そこで、上記メンバーシップ関数を本稿では次のように記述する。

$$\mu(x|u)$$

ここで、uはあいまいさの意味を表わし、ターム(term)とよぶ。

Tをタームの普遍集合とし、$\{\rho_i^1\}$をT上の同値関係の集合とする。このρ_i^1を用いてTを次のように同値類のクラスに分類する。

$$U_{\rho_i}(a) = U^2 = \{u \in T \mid u\rho_i a,\ a \in T\},$$

$$V_{\rho_j}(b) = V^2 = \{v \in T \mid v\rho_j b,\ b \in T\},$$

$$W_{\rho_k}(c) = W^2 = \{w \in T \mid w\rho_k c,\ c \in T\},$$

このU^2は同値関係ρ_i^1を用いて構成された同値類であるが、これをレベル2の類別（あるいは、単に類別）と呼ぶ。類別U^2とV^2は$\rho_i^1 = \rho_j^1$のとき等しいと言い、$U^2 = V^2$と書く。レベル2の類別全体からなるクラスを　とし、T^2上の同値関係の集合を$\{\rho_i^2\}$とすると、今と同様の手順により、レベル2の類別を要素とするレベル3の類別を構成することが出来る。この様にして、一般にレベルM－1の類別を要素とするレベルMの類別を帰納的に構成する事ができる。

本稿では、メンバーシップ関数を$\mu(x|u)$のように表わすことにしたので、この表記法に従って、従来のmax, min演算を次のように表わすものとする。

$$\mu(x|u) \vee \nu(x|v) = \mu(x) \vee \nu(x)|u + v,$$

$$\mu(x|u) \wedge \nu(x|v) = \mu(x) \wedge \nu(x)|u + v,$$

ここで、$\mu(x)$と$\nu(x)$は各々$\mu(x|u)$と$\nu(x|v)$の値を示しており、$u+v$はタームuとvの演算を行なった事を意味している。

多値ファジイ集合Aとは、次のようなメンバーシップ関数Fによって完全に特性づけられるXの部分集合である。

$$F : X \longrightarrow [0, 1]^n,$$

$$F(x) = (\mu_1(x|u_1), \ldots, \nu_j(x|v_j), \ldots, \lambda_k(x|w_k)),$$

$$\forall x \in X,\ u_i \in U^2,\ v_j \in V^2,\ w_k \in W^2,$$

ここで、U^2、V^2、W^2等はレベル2の類別であり、μ_i、ν_j、λ_kは通常のファジイ集合のメンバーシップ関数を表わしている。このMメンバーシップ関数Fを用いて多値ファジイ集合は、一般に

$$A = \int F(x)/x$$

と表わされる。もしXが有限集合の場合には　$A = \Sigma F(x_i)/x_i$　と表わされる。

3．レベルMファジイ集合

L.A. Zadehによって提案されたレベル2ファジイ集合は本質的に、同じ類別に属する通常のファジイ集合の集まりである。そこで、レベル2ファジイ

集合を次のようなレベル２の類別で制限された多値メンバーシップ関数（以後、ＭＭＦと略記する）Ｍで特性づけられる集合である。

$$M^2(x) = F(x)|U^2 = (\mu_1(x|u_1), \ldots, \mu_n(x|u_n)) = \{\mu_i(x|u_i)\},$$
$$\forall x \in X, \quad u_i \in U^2.$$

次にレベルＭファジイ集合を導入する。レベルＭファジイ集合とは、レベルＭの類別で制限されたレベルＭ－１のＭＭＦを要素とするＭＭＦによって特性づけられるＸの部分集合のことである。

$$M^m(x) = (M_1^{m-1}(x|u_1^{m-1}), \ldots, M_n^{m-1}(x|u_n^{m-1})) = \{M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\},$$
$$\forall x \in X, \quad u_i^{m-1} \in U^m,$$

ここで、$M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})$ はレベルＭ－１のＭＭＦであり、U^m はレベルＭの類別を表わしている。すなわち、レベルＭファジイー集合はレベル２ファジイ集合から帰納的に導くことができる。レベルＭファジイ集合は、一般に

$$A = \Sigma M^m(x_i)/x_i, \quad \forall x_i \in X,$$

と表わすことができる。

レベルＭファジイ集合間および多値メンバーシップ関数間に幾つかの関係を導入する。ＡとＢを共にレベルＭファジイ集合とし、$M^m(x)$ および $N^m(x)$ をそれの評価するＭＭＦとする。

$$M^m(x) = \{M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\}, \quad N^m(x) = \{N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1})\},$$
$$\forall x \in X, u_i^{m-1} \in U^m, \quad v_j^{m-1} \in V^m.$$

［定義　１］

ＡとＢをレベルＭファジイ集合とし、そのＭＭＦを $M^m(x)$ と $N^m(x)$ とする。ＡとＢの等価関係を次のように定義する。

$$A = B \iff M^m(x) = N^m(x),$$

ここで、$M^m(x)=N^m(x)$ は $M^m(x)$ の全ての要素と、$N^m(x)$ の全ての要素が等しく、かつ $U^{m-1}=V^{m-1}$ であることを意味する。

［定義　２］

Ａと $\tilde{A}$ をレベルＭファジイ集合とし、各ＭＭＦを $M^m(x)$ と $\tilde{M}^m(x)$ とする。

$$M^m(x) = (M_1^{m-1}(x|u_1^{m-1}), \ldots, M_n^{m-1}(x|u_n^{m-1})),$$

$$\tilde{M}^m(x) = (\tilde{M}_1^{m-1}(x|u_1^{m-1}), \ldots, \tilde{M}_p^{m-1}(x|u_p^{m-1})),$$
$$\forall x \in X, \quad u_i^{m-1} \in U^m, \quad p \leq n.$$

$M^m(x)$の各要素が $\tilde{M}^m(x)$のそれであるとき、$\tilde{M}^m(x)$ は $M^m(x)$ に含まれる、あるいは $\tilde{M}^m(x)$ は $M^m(x)$ を含むといい、次のように書く。

$$\tilde{M}^m(x) \subset M^m(x) \quad \text{or} \quad M^m(x) \supset \tilde{M}^m(x)$$

［定義　3］

$M^m(x)$と　$N^m(x)$ をレベルMファジイ集合のMMFとする。 $M^m(x)$ の各要素の値が$N^m(x)$ のある要素の値より小さく、かつ$N^m(x)$ の各要素の値が $M^m(x)$ のある要素の値より大きいならば、$N^m(x)$ は $M^m(x)$より大きい、あるいは $N^m(x)$は $M^m(x)$より小さいといい、

$$M^m(x) \boxed{<} N^m(x) \quad \text{or} \quad N^m(x) \boxed{>} M^m(x),$$

と書く。

［定義　4］

$M^m(x)$ と $N^m(x)$をレベルMファジイ集合のMMFとする。もし、$N^m(x)$ のある要素の値が $M^m(x)$の各要素の値より大きいか等しいとき、もしくは、$M^m(x)$のある要素の値が$N^m(x)$ の各要素の値より小さいか等しいとき、$M^m(x)$は$N^m(x)$ より下方である、あるいは $N^m(x)$は $M^m(x)$より上方であるといい、

$$M^m(x) \boxed{\leq} N^m(x) \quad \text{or} \quad N^m(x) \boxed{\geq} M^m(x),$$

と書く。

［定義　5］

$M^m(x)$をレベルMファジイ集合のMMFとする。Aの補集合（MMF$M^m(x)$の否定）、MMFの上限及び下限、MMFの広がりを次のように定義する。

補集合（否定）　$\boxed{\neg} M^m(x) = 1 - M^m(x) = \{1 - M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\}.$

上　限　　$\overline{M}^m(x) = \max\{M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\}.$

下　限　　$\underline{M}^m(x) = \min\{M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\}.$

広がり　　$\beta = \overline{M}^m(x) - \underline{M}^m(x).$

［定義　6］

AとBをレベルMファジイ集合とし、そのMMFを各々$M^m(x)$ 、$N^m(x)$ とする。このとき、レベルMファジイ集合間の包含関係を次のように定義する。

$$A \subset B \quad \text{or} \quad B \supset A \Leftrightarrow \quad M^m(x) \boxed{\leq} N^m(x)$$

次にMMFの間の和と積に関する新しい演算 $\tilde{S}$と $\tilde{T}$を次のように導入する。

$$\tilde{S}(M^m,N^m) = S(M^m,N^m)|_{\Delta(U^m,V^m)} = \{S_{ij}(M^m,N^m)|_{\Delta_{ij}(U^m,V^m)}\},$$

$$\tilde{T}(M^m,N^m) = T(M^m,N^m)|_{\Delta(U^m,V^m)} = \{T_{ij}(M^m,N^m)|_{\Delta_{ij}(U^m,V^m)}\}$$

この(i,j) 成分は各々次のようになる。

$$S_{ij}(M^m,N^m)|_{\Delta_{ij}(U^m,V^m)} = \begin{cases} M_i^{m-1}(x) \vee N_j^{m-1}(x) \mid u_i^{m-1} + v_j^{m-1} & U^m \neq V^m \\ M_i^{m-1}(x) \vee N_j^{m-1}(x) \mid u_i^{m-1} \quad (u_i^{m-1} = v_j^{m-1}) & U^m = V^m \\ \tilde{\emptyset} \quad (u_i^{m-1} \neq v_j^{m-1}) & \end{cases}$$

$$T_{ij}(M^m,N^m)|\Delta_{ij}(U^m,V^m) = \begin{cases} M_i^{m-1}(x) \wedge N_j^{m-1}(x) \mid u_i^{m-1} + v_j^{m-1} & U^m \neq V^m \\ M_i^{m-1}(x) \wedge N_j^{m-1}(x) \mid u_i^{m-1} \quad (u_i^{m-1} = v_j^{m-1}) \\ \tilde{\emptyset} \quad (u_i^{m-1} \neq v_j^{m-1}) \end{cases} \Big\} U^m = V^m$$

ここで、添え字iとjのついた$M_i^{m-1}(x)$と$N_j^{m-1}(x)$は各々$M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})$と$N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1})$の値を示し、記号 は $U^m = V^m$ かつ $u_i^{m-1} \neq v_j^{m-1}$ の時、演算を行なわない事を示している。

注1　　添え字iのついた$M_i^{m-1}(x)$はレベルMファジイ集合のMMFのi番目の要素$M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})$の値を示し、添え字のない$M^{m-1}(x)$はレベルM－1のファジイ集合のMMFを表わしている。また、肩文字mのついた大文字U^mはレベルMの類別を表わし、肩文字 m-1と添え字iのついた小文字u_i^{m-1}はレベルMの類別の要素を表わしている。

演算規則　　レベルMファジイ集合のMMF$M^m(x)$と$N^m(x)$の間の和と積に関する演算はMMFを制限する類別の間の関係に依って次のように分類される。

1）　類別が等しくない場合　：

この時は、各MMFを構成する全要素に対して演算を行ない、その演算が和か積かに従って　$\vee$

$$M^m(x) \boxed{\vee} N^m(x) \mid u_i + v_j \quad \text{or} \quad M^m(x) \boxed{\wedge} N^m(x) \mid u_i + v_j$$

なる形をとる。

2）　類別が等しい場合：

a）　$U^m = V^m$　の場合：　この場合には演算を行ない、その演算が和か積かに従って

$$M^m(x) \boxed{\vee} N^m(x) \mid u_i \quad \text{or} \quad M^m(x) \boxed{\wedge} N^m(x) \mid u_i$$

なる形をとる。

b）　$u_i^{m-1} \neq v_j^{m-1}$　の場合：　この場合には演算を行なわない。このことを示すために記号　が用いられている。これは演算を行なっても意味がないからである。

2個以上のMMFの和と積に関する複合演算に於いても、もしMMFを制限する類別に、上述の1）、2）のような関係が発生した場合には、同じ演算規則が適応される。

［定義　7］

AとBをレベルMファジイ集合とし、それらのMMFを各々$M^m(x)$および$N^m(x)$とする。AとBの和および積、MMF間の和と積を次のようにてぎする。

$$A \cup B = C \iff M^m(x) \boxed{\vee} N^m(x) = \tilde{S}(M^m,N^m),$$

$$A \cap B = D \iff M^m(x) \boxed{\wedge} N^m(x) = \tilde{T}(M^m,N^m)$$

これらを用いて、次の定理を得る。紙面の関係上証明は省略する。

［定理　1］

A，BおよびCをレベルMファジイ集合とし、そのMMFを各々$M^m(x)$、$N^m(x)$、$K^m(x)$とする。先に定義したフレーム max $\boxed{\vee}$、フレーム min $\boxed{\wedge}$、フレームinequality $\boxed{\geq}$ およびフレーム negation $\boxed{\neg}$ の演算のもとで、任

意のＭＭＦは次のような性質を満たす。

i) $M^m(x) \boxed{\leq} M^m(x)$,

ii) $M^m(x) \boxed{\leq} N^m(x),\ N^m(x) \boxed{\leq} K^m(x) \Rightarrow M^m(x) \boxed{\leq} K^m(x)$,

iii) $M^m(x) \boxed{\vee} M^m(x) = M^m(x),\quad M^m(x) \boxed{\wedge} M^m(x) = M^m(x)$,

iv) $\begin{cases} M^m(x) \boxed{\vee} N^m(x) = N^m(x) \boxed{\vee} M^m(x), \\ M^m(x) \boxed{\wedge} N^m(x) = N^m(x) \boxed{\wedge} M^m(x), \end{cases}$

v) $\begin{cases} (M^m(x) \boxed{\vee} N^m(x)) \boxed{\vee} K^m(x) = M^m(x) \boxed{\vee} (N^m(x) \boxed{\vee} K^m(x)), \\ (M^m(x) \boxed{\wedge} N^m(x)) \boxed{\wedge} K^m(x) = M^m(x) \boxed{\wedge} (N^m(x) \boxed{\wedge} K^m(x)), \end{cases}$

vi) $\begin{cases} M^m(x) \boxed{\vee} (N^m(x) \boxed{\wedge} K^m(x)) = (M^m(x) \boxed{\vee} N^m(x)) \boxed{\wedge} (M^m(x) \boxed{\vee} K^m(x)), \\ M^m(x) \boxed{\wedge} (N^m(x) \boxed{\vee} K^m(x)) = (M^m(x) \boxed{\wedge} N^m(x)) \boxed{\vee} (M^m(X) \boxed{\wedge} K^m(x)), \end{cases}$

vii) $\boxed{\neg}(\boxed{\neg} M^m(x)) = M^m(x)$,

viii) $\begin{cases} \boxed{\neg}(M^m(x) \boxed{\vee} N^m(x)) = (\boxed{\neg} M^m(x)) \boxed{\wedge} (\boxed{\neg} N^m(x)), \\ \boxed{\neg}(M^m(x) \boxed{\wedge} N^m(x)) = (\boxed{\neg} M^m(x)) \boxed{\vee} (\boxed{\neg} N^m(x)), \end{cases}$

ix) $\begin{cases} M^m(x) \boxed{\vee} \underline{0} = M^m(x), & M^m(x) \boxed{\wedge} \underline{1} = M^m(x), \\ M^m(x) \boxed{\vee} \underline{1} = \underline{1}, & M^m(x) \boxed{\wedge} \underline{0} = \underline{0}, \end{cases}$

４．まとめ

レベル２ファジイ集合をレベル２の類別で制限される多値メンバーシップ関数によって特性づけられるファジイ集合として導入した。更に、このレベル２ファジイ集合により帰納的にレベルＭファジイ集合を定義した。また、レベルＭの類別で制限される多値メンバーシップ関数ＭＭＦ間に幾つかの関係と演算を導入した。これらの演算のもとで、基本的代数法則を多値メンバーシップ関数ＭＭＦが満たすことを示した。本稿で取り扱った演算と異なる演算を考える事ができるが、これらに関しては次の機会に述べる。

５．参考文献

1) L.A. Zadeh, Quantitative Fuzzy Semantics, Information Sciences, 3, pp.159-176, 1971.

2) R.C. Young, The Algebra of Many-Valued Quantities, Mathematishe Annalen, 104, pp.260-296, 1931.

11時45分～12時10分

APPLICATION OF FUZZY LOGIC FOR THE INTERPERSONAL PERCEPTION METHOD (IPM)

Minoru YABUUCHI
Gakushuin University

Abstract. The purpose of this paper is to apply fuzzy logical functions to the analysis of the Interpersonal Perception Method (IPM). Fuzzy expressions of basic IPM relationships are derived from generalizations of Alperson's technique for a Boolean analysis of the IPM. Illustrative examples are given.

Key words. Interpersonal Perception Method (IPM), dyadic relationship, fuzzy logic.

INTERPERSONAL PERCEPTION METHOD (IPM)

It is a reasonable assumption that when two people are engaged in a meaningful encounter, a good portion of their interaction may be governed by a variety of attributions and expectations that they hold about each other.

Laing, Phillipson, and Lee(1966) have developed an ingenious technique, the Interpersonal Perception Method (IPM), for the systematic investigation of these relationships.

The IPM is designed to measure and provide understanding of the interpenetrations of two individuals in respect of a range of key issues with which they may be concerned in the context of their dyadic relationship.

It is a 240-item test which is taken by each member of any dyad relationship. However, for the sake of convenience and clarity, the members of the dyad are designated as husband(H) and wife(W). The 240 items consist of 60 descriptive phrases or attributes, e.g., loves, takes advantage of, takes seriously, etc., each phrase being appropriately worded for each of the four types of issues.

An issue $|X|$ is any attributive statement about which a judgment may be formed. For example, H loves W.

The four types of issues are: (a) H in relation to W, e.g., 'The husband loves the wife'; (b) W in relation to H, e.g., 'The wife loves the husband'; (c) H in relation to himself, e.g., 'The husband loves himself'; and (d) W in relation to herself,e.g., The wife loves herself.'

Each member of the dyad responds to three questions for all attributes of all types of issues. These questions are designed to use four-point rating scale where ++ meant 'VERY TRUE', + meant 'SLIGHTLY TRUE', - meant 'SLIGHTLY UNTRUE', and -- meant 'VERY UNTRUE' for three levels of perspective; direct perspective, H_1 or W_1; meta perspective, H_2 or W_2; and metameta perspective, H_3 or W_3.

The direct perspective is the opinion of either member on an issue(H_1 is $H \rightarrow |X|$, W_1 is $W \rightarrow |X|$ where symbol '$\rightarrow$' should be read 'view of', and $|X|$ means any issues.). If H thinks that the statement, 'I love my wife' is very true, his direct perspective H_1 on that issue is ++. The meta perspective is a member's

prediction of his partner's view of an issue (H_2 is $H \rightarrow W \rightarrow | X |$, W_2 is $W \rightarrow H \rightarrow | X |$). If H feels it is slightly true that his wife would say that he loves her, his meta perspective (H_2) would be + on the issue < H loves W > The metameta perspective is the opinion a member thinks his partner has concerning his own view of an issue (H_3 is $H \rightarrow W \rightarrow H \rightarrow | X |$, W_3 is $W \rightarrow H \rightarrow W \rightarrow | X |$). IF H feels that it is very untrue that W says ,"I think that he would say that he loves me", then his metameta perspective (H3) on the issue of (H loves W) is ++.

The structure presented Figure 1 suggests several interesting matched comparisons which might be made.

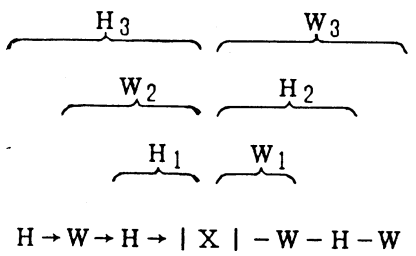


Fig. 1 Relationship among IPM levels of perspective

FUZZY ANALYSIS OF THE IPM

Boolean analysis of the IPM Alperson(1975) has developed the technique for a Boolean derivation of an IPM determination. By means of a logical analysis which makes use of Boolean algebra, his technique removes the need for intuitive derivations of terms, it clarifies the structure of IPM relationships, and reduces scoring effort. He shows simplified Boolean expressions for eleven first-order determinations,i.e., comparisons of two perspectives, and six second-order determinations, i.e., comparisons of two first-order determinations.

Alperson argues that none of the richness of the IPM is lost in the Boolean analysis. In Boolean logic it is assumed that every proposition is either true and false.

However, it is natural that quite often the IPM questionaire items might have values other than truth and falsehood, and the information about the degree of truth felt by subjects on the IPM item is lost in Boolean analysis.

Fuzzy analysis of the IPM In fuzzy logic, the truth value of a proposition can assume any value in the interval [0,1] instead of assuming two values. Then, it is possible to indicate the degree of truth represented by the proposition. For example, let a proposition P represent an attributive statement, "I love her", then the truth value of P is certainly 1 for some, and it is certainly 0 for some, and it may be some value between 0 and 1 for others.

It is reasonable that fuzzy logical functions are applied for the analysis of the IPM relationships. Fuzzy expressions of the IPM determinations are as follows (Yabuuchi,1983,1984).

First-order determinations

Agreement reflects the correspondence between a member's view and the partner's view on an issue Thus, agreement, α, is determined by the comparison of a member's direct perspective and the partner's direct perspective; $H \rightarrow | X |$ and $W \rightarrow | X |$. If these perspectives match, then couple may be said to agree on the issue actually. Agreement, α_{hw} ,is given by fuzzy equivalence,

$$\alpha_{hw} = MAX(MIN(h_1, w_1), MIN(1-h_1, 1-w_1))$$

where h_j and w_j are truth-values in the closed interval [0,1] of fuzzy variable, H_j and W_j.

Understanding reflects the correspondence between a member's view of the partner's view and partner's view of an issue. Thus, understanding, μ, is determined by the comparison of a member's meta perspective and the partner's direct perspective, e.g., $H\rightarrow W\rightarrow |X|$ with $W\rightarrow |X|$ defines μ_{hw}. If these perspectives match, the member H understands the partner W on the issue Understanding, μ_{hw} and μ_{wh} are given by fuzzy equivalence.

$$\mu_{hw} = MAX(MIN(h_2,w_1),MIN(1-h_2,1-w_1))$$

$$\mu_{wh} = MAX(MIN(h_1,w_2),MIN(1-h_1,1-w_2))$$

Realization reflects a member's ability to predict how his partner reads him on an issue. Thus, ρ, is determined by the comparison of a member's metameta perspective with partner's meta-perspective, e.g., $H\rightarrow W\rightarrow H\rightarrow |X|$ with $W\rightarrow H\rightarrow |X|$ defines ρ_{hw}. If these perspectives match, H realizes what W predicts about his response on the issue. Therefore,

$$\rho_{hw} = MAX(MIN(h_3,w_2),MIN(1-h_3,1-w_2))$$

$$\rho_{wh} = MAX(MIN(w_3,h_2),MIN(1-w_3,1-h_2))$$

A member's feelings of being understood by the partner on an issue, ϕ, is determined by the comparison of a member's metameta perspective and his direct perspective on the issue, e.g., $H\rightarrow W\rightarrow H\rightarrow |X|$ and $H\rightarrow |X|$. If these perspectives match, H feels understood by W on the issue. Therefore,

$$\phi_{hw} = MAX(MIN(h_3,h_1),MIN(1-h_3,1-h_1))$$

$$\phi_{wh} = MAX(MIN(w_3,w_1),MIN(1-w_3,1-w_1))$$

A member's expectations of agreement on an issue ϵ, is determined by the comparison of a member's meta perspective and his direct perspective on the issue, e.g., $H\rightarrow W\rightarrow |X|$ and $H\rightarrow |X|$. If these perspectives match, it is infered that he expects agreement on the issue.

$$\epsilon_{hw} = MAX(MIN(h_2,h_1),MIN(1-h_2,1-h_1))$$

$$\epsilon_{wh} = MAX(MIN(w_2,w_1),MIN(1-w_2,1-w_1))$$

Perception of the partner's expectations on agreement on an issue, ψ, is determined by the comparison of a member's meta perspective and his metameta perspective, e.g., $H\rightarrow W\rightarrow |X|$ and $H\rightarrow W\rightarrow H\rightarrow |X|$. If these perspectives match, it is infered that he perceives the partner's expectations on agreement on the issue. Alperson termed ϕ, ϵ, and ψ projection.

$$\psi_{hw} = MAX(MIN(h_3,h_2),MIN(1-h_3,1-h_2))$$

$$\psi_{wh} = MAX(MIN(w_3,w_2),MIN(1-w_3,1-w_2))$$

Second-order determinations

The determination of veridicality of these projections requires the derivation of corresponding second-order determinations. The veridicality of feelings of being understood is given by the comparison of ϕ_{hw} and μ_{wh}, and ϕ_{wh} and μ_{hw}.

$$V_{\phi h} = MAX(MIN(\phi_{hw}, \mu_{wh}),MIN(1-\phi_{hw}, 1-\mu_{wh}))$$

$$V_{\phi w} = MAX(MIN(\phi_{wh}, \mu_{hw}),MIN(1-\phi_{wh}, 1-\mu_{hw}))$$

The veridicality of expectations on agreement, $V_{\epsilon h}$ and $V_{\epsilon w}$, are given the comparison of ϵ_{hw} and α_{hw}, and ϵ_{wh} and α_{hw}, respectively.

$V_{\epsilon h} = MAX(MIN(\epsilon_{hw}, \alpha_{hw}), MIN(1-\epsilon_{hw}, 1-\alpha_{hw}))$

$V_{\epsilon w} = MAX(MIN(\epsilon_{wh}, \alpha_{hw}), MIN(1-\epsilon_{wh}, 1-\alpha_{hw}))$

The veridicality of perception of partner's expectation on agreement, $V_{\epsilon h}$ and $V_{\epsilon w}$, are given the comparison of ψ_{hw} and ϵ_{wh}, and ψ_{wh} and ϵ_{hw}, respectively.

$V_{\psi h} = MAX(MIN(\psi_{hw}, \epsilon_{wh}), MIN(1-\psi_{hw}, 1-\epsilon_{wh}))$

$V_{\psi w} = MAX(MIN(\psi_{wh}, \epsilon_{hw}), MIN(1-\psi_{wh}, 1-\epsilon_{hw}))$

Realization of fuzzy functions of first-order determination, ϕ_{hw} and μ_{wh}, and second-order determination derived from ϕ_{hw}, μ_{wh} are illustrated in Figure 2a, b.

ILLUSTRATIVE EXAMPLES

Mthod The subjects were 8 undergraduates. They were instructed to read throughly a novel on a conjugal relation : "HI NO CHIJIMARI" writen by Toshio SHIMAO (島尾敏雄著『日のちぢまり』), and to estimate the degree of truth of each IPM item from the standpoint of husband H and wife W who were characters in the novel.

Result Table 1 presents the values, calculated on the basis of 6 fuzzy variables, of 11 first-order determinations, 4 second-order determinations, and anomie defined by Scheff(1967) for four types ofissues with respect to each attributive statement. Scheff's characterization of anonie is

$MIN(1-\rho_{hw}, 1-\mu_{hw}, 1-\alpha_{hw}, 1-\mu_{wh}, 1-\rho_{wh})$.

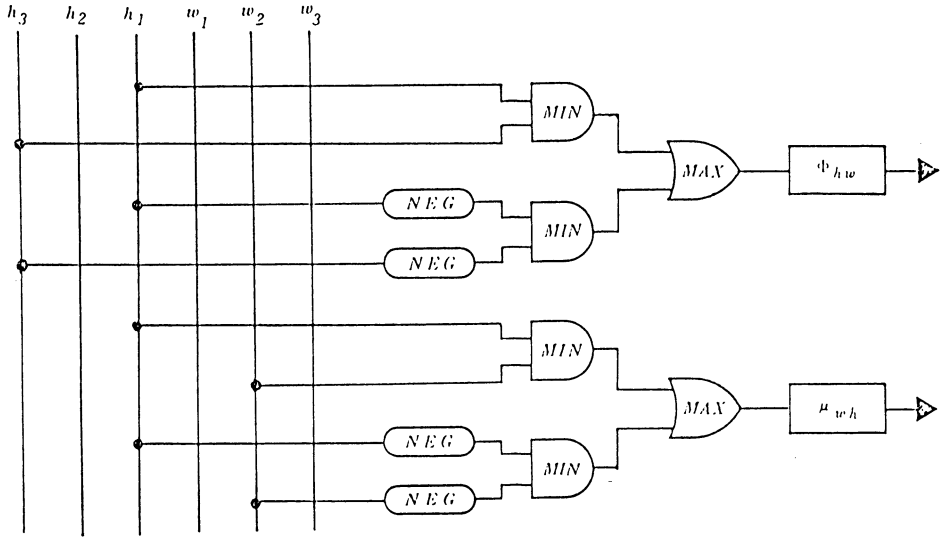


Fig.2a. The realization of the fuzzy function, ϕ_{hw}, μ_{wh}

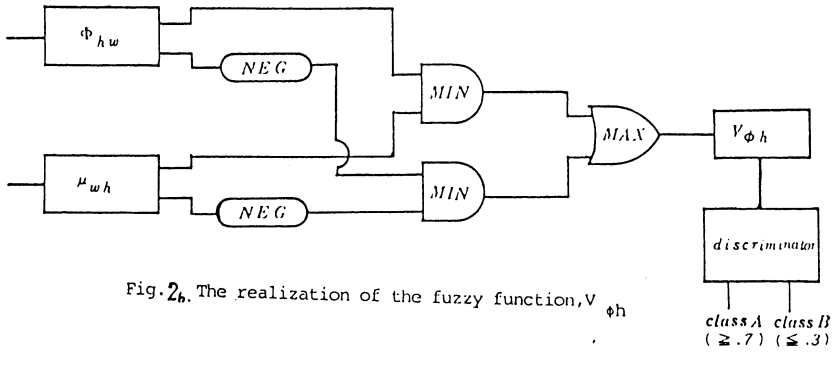


Fig.2b. The realization of the fuzzy function, $V_{\phi h}$

On the statement "W is disappointed in H", the couple agree on the issue actually. (α = .9). H understands that W recognizes that "W disappointed in H" (μ_{hw} = .7) and W understands that H recognizes that "W is disappointed in H" (μ_{wh} = .7). H feels understood by W and W feels understood by H on the issue. (ϕ_{hw} = ϕ_{wh} = .7). H (W) realizes W's (H's) prediction of his(her)response. (ρ_{hw} = ρ_{wh} = .7). Then, veridicality of feelings of being understood and of expectations on agreement on the issue is high for both H and W. ($V_{\phi h} = V_{\phi w} = .7$; $V_{\epsilon h} = V_{\epsilon w} = .7$).

REFERENCES

Alperson, B.L. A Boolean analysis of interpersoal perception. Human Relations, 1975a,28, 627-652.

Alperson,B.L. In search of Buber's ghosts: a calculus for interpersonal phenomenology. Behavioral Science, 1975b, 20,179-190.

Laing,R.D. Pillipson,H.,& Lee,A.R. Interpersonal perception. NY: Springer,1966.

Scheff,T.J. Toward a sociological model of consensus. Amer. Sociological Review, 1967,32, 32-46.

Yabuuchi,M. Fuzzy logical analysis I. 47th conf. Jap.Psychol.Assoc., 1983.(in Japanese)

Yabuuchi,M. Fuzzy logical analysis II.48th conf. Jap.Psychol.Assoc., 1984.(in Japanese)

TABLE 1 Values for IPM determinations

Items	α	μ_{hw}	μ_{wh}	ρ_{hw}	ρ_{wh}	ϕ_{hw}	ϕ_{wh}	ϵ_h	ϵ_w	ψ_h	ψ_w	$V_{\phi h}$	$V_{\phi w}$	$V_{\epsilon h}$	$V_{\epsilon w}$	anomie
"understands"																
HW	.6	.9	.6	.5	.7	.5	.7	.6	.7	.5	.7	.5	.7	.6	.6	.1
WH	.4	.6	.7	.7	.4	.7	.4	.3	.4	.3	.6	.7	.5	.6	.6	.3
HH	.6	.4	.7	.5	.4	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.3
WW	.6	.7	.5	.7	.3	.5	.3	.5	.3	.3	.7	.5	.3	.5	.5	.3
"is disappointed in"																
HW	.5	.7	.5	.7	.7	.5	.7	.5	.7	.7	.7	.5	.7	.5	.5	.3
WH	.9	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.1
HH	.4	.6	.3	.4	.5	.5	.5	.3	.6	.5	.5	.5	.5	.6	.4	.4
WW	.7	.7	.7	.3	.5	.3	.5	.7	.7	.3	.6	.3	.5	.7	.7	.3
"takes good care of"																
HW	.4	.8	.6	.5	.7	.5	.7	.4	.3	.5	.3	.5	.7	.6	.6	.2
WH	.5	.5	.7	.5	.6	.7	.5	.3	.5	.5	.3	.7	.5	.5	.5	.3
HH	.4	.7	.4	.5	.7	.5	.5	.4	.6	.5	.6	.5	.5	.6	.4	.3
WW	.7	.4	.7	.6	.4	.5	.3	.4	.7	.4	.6	.5	.6	.4	.7	.3
"is bitter towards"																
HW	.4	.6	.6	.7	.8	.6	.8	.4	.1	.3	.2	.6	.8	.6	.6	.2
WH	.5	.5	.8	.7	.5	.7	.5	.5	.5	.5	.3	.7	.5	.5	.5	.2
HH	.3	.7	.4	.6	.7	.3	.7	.3	.6	.7	.6	.6	.7	.7	.3	.3
WW	.6	.6	.6	.5	.6	.5	.7	.6	.7	.5	.7	.5	.6	.6	.6	.4
"deceives"																
HW	.7	.9	.5	.5	.8	.6	.8	.7	.5	.6	.5	.5	.8	.7	.5	.1
WH	.8	.9	.7	.7	.8	.7	.8	.8	.7	.7	.7	.7	.8	.8	.7	.1
HH	.7	.7	.6	.4	.3	.4	.3	.7	.6	.4	.4	.4	.3	.7	.6	.3
WW	.7	.7	.5	.5	.4	.6	.4	.7	.5	.6	.5	.5	.4	.7	.5	.3
"won't let be"																
HW	.7	.7	.4	.5	.7	.5	.7	.7	.4	.5	.4	.5	.7	.7	.4	.3
WH	.7	.7	.7	.7	.5	.8	.5	.7	.7	.7	.5	.7	.5	.7	.7	.3
HH	.3	.7	.5	.5	.7	.5	.7	.4	.5	.5	.5	.5	.7	.6	.5	.3
WW	.7	.7	.5	.5	.4	.5	.4	.7	.5	.5	.5	.5	.4	.7	.5	.3

特　別　講　演

Habitual Domain Analysis, A Way to Reduce Human Fuzziness

P. L. Yu[+]

C. A. Scupin Distinguished Professor
School of Business,
University of Kansas
Lawrence, Kansas

(Currently)

Visiting Distinguished Professor
The Institute of Economics
Academia Sinica
Nankang, Taipei, Taiwan, ROC

April, 1985

Abstract

An effective way to cope with fuzziness is to understand its source — human perception and behavior. We shall describe a (dynamic) micro behavioral mechanism which illustrate why it is so difficult to judge correctly and precisely in many human behaviors. Fortunately the mechanism can also be used to show the existence of habitual domains (HD). Thus human also have predictable tendancy, no mather how imprecise is it, in their perception, judgment and responses to a large number of events. To make better prediction with less degree of fuzziness it is important to study and understand habitual domains.

In this talk we will describe the elements of habitual domain: potential domains, actual domains, activation probability and reachable domains. We then discuss how to use the concepts of habitual domains to tackle a number of fuzzy problems including high stake decision problems, optimal solutions, gaming and conflict dissolutions, career management, and leadership.

1. Introduction

Consider the following nontrivial decision problem:

> A retiring CEO (Chief Executive Officer) invited to his ranch two finalists (A & B) from which he would select his replacement. A & B were given a black and white horse respectively. The CEO gave a course for the horse race and said, "Starting at the same time, whoever's horse is slower in completing the course will be selected as the next CEO!!" Finally, A jumped on B's horse and rode as fast as he could to the finish line. Naturally, A was the new CEO.

Such a problem is one that can not readily be solved by traditional game theory. Instead, it is through the use of second order games and the concept of habitual domains that one can approach such a problem. People would usually expect that the faster horse would be the winner (a habitual domain). When a problem is not in our habitual domain, it is difficult to assess and solve until our habitual domain is suitably expanded. In this situation we may say that the problem is extremely fuzzy. On the other hand if the problem can be comprehended by our habitual domains, we say it is not or not very fuzzy.

Based on their memory structures and stimuli, people perceive, conceive, and make judgments and decisions. Mathematical analysis and optimization techniques are certainly helpful in understanding decision processes, but when we do not know the human behavior mechanism, their power is greatly reduced. In many important decision or conflict problems, genuine and creative solutions are obtained through the understanding of human nature, which is usually beyond simple mathematical analysis.

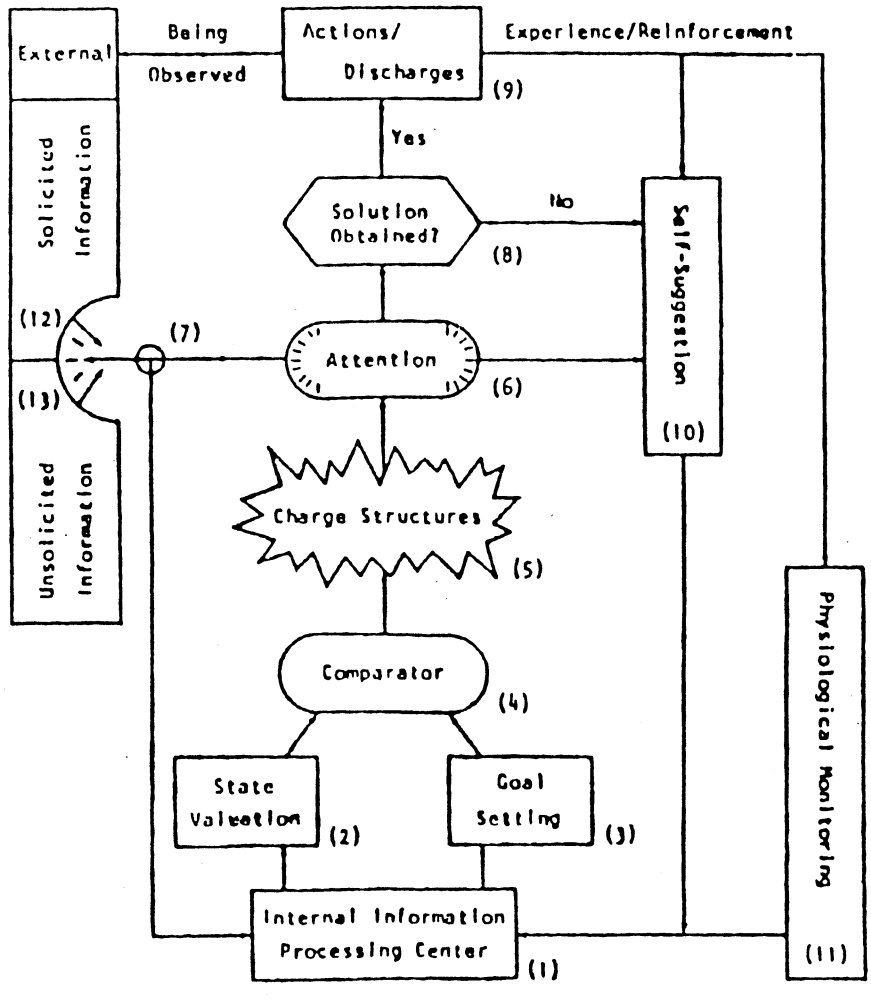
Over several million years of evolution, human beings have developed complicated and sophisticated systems of behavior mechanisms. While many are understood, still more are not. Some are to all normal human beings, while many are unique to particular individuals.

In an attempt to understand human behavior and to integrate the findings of experimental and social psychology, optimization concepts and common wisdom, we will first describe a dynamic micro mechanism of human behavior in section 2. With flexible interpretation, the model can encompass most normal human behavior. While each individual can vary the parameters in a unique way, the overall structure of the dynamic remains almost the same.

One of the major consequences of the model is the existence of stable habitual domains (collections of excited ideas) for each human being. Based on the concepts of habitual domains, many difficult problems can be more precisely described and studied (see Section 3), including high stake decision problems, rationality, gaming and conflict dissolution, career management and leadership.

2 Micro Dynamic Mechanism of Behavior

Flowchart 1 illustrates the micro dynamic mechanism of behavior. Details concerning the mechanism can be found in [14] or chapter 9 of [17]. For our purposes, the main concepts are sketched here as follows:



Flow Chart 1. Dynamics of Behavior

(i) Each individual is endowed with an internal information processing and problem solving capacity. Like a "super computer", the brain encodes, stores and retrieves ideas and messages, using the pattern circuits of excited neural cells. The stored messages can be dynamically restructured so as to most efficiently retrieve needed relevant

information. Using association and analogy, the brain interprets arriving events based on the stored memory or learned knowledge. (See Box (1); also Hypotheses 1-4 of [14,17] for details.) The arriving events can come from self-suggestion (Box 10), physiological monitoring (Box 11) and/or external inputs (Boxes 12, 13 and 7).

(ii) Each human being has a set of goals or equilibrium points to reach and maintain (goal setting). A list of goals is given in Table 1 (p. 4). The status or state of each goal is constantly (consciously or unconsciously) monitored (state valuation). When a significant "unfavorable" deviation between the perceived value and the ideal value exists, each goal can produce a "charge" (a tension or urge). The totality of the charges produced by all goals from a hierarchical structure is called charge structure. This charge structure can rapidly change with time, with information inputs, and with one's psychological state and condition. (See Boxes 2-5; also Hypotheses 5-6 of [14,17].) Note that when a goal (e.g., health) is maintained at the tolerable interval of the ideal, without other effort, the goal may produce very little or no charge and will be neglected.

(iii) Attention (Box 6) is defined as a human's conscious time allocation of his internal information processing and problem solving capacity over various events and activities. The time could be measured in milliseconds. The purpose of attention is to release the charges in the most efficient way. These ways involve: (a) actions and discharges when solutions are obtained (Boxes 8-9); (b) acquiring external information (Boxes 7, 12, and 13,); or (c) self-suggestion for internal thinking, justification and rationalization (Box 10). All of these functions feed back to the internal information processing center. (See Hypothesis 6 of [14,17].)

(iv) Each event can be associated with a set of goals. Its significance can be defined in terms of the remaining charge structures when the event is removed. According to lexicographical ordering, the significance of events can be compared. The most significant event will command the attention. As charge structures rapidly change, the attention can switch rapidly from one event to other events. (See Hypothesis 6 of [14,17].)

(v) When there is a set of alternatives for discharge, the one which can most reduce the current charge structures will be chosen for discharge. This is called the least resistance principle. The remaining charge is a measure of resistance to the total discharge. (See Hypothesis 7 of [14,17].). Note that (iv) and (v) are similar. Both of them are complex dynamic optimization problems for our "brain."

Table 1. A Structure of Goal Functions

(i) Survival and Security: physiological health (proper blood pressure, body temperature and balance of biochemical states); proper level and quality of air, water, food, heat, clothes, shelter and mobility; safety and danger free; acquisition of money and other economic goods;

(ii) Perpetuation of the Species: sexual activities; giving birth to the next generation; family love, health and welfare;

(iii) Self-Importance Feeling: self-respect and self-esteem; esteem and respect from others; power and dominance; recognition and prestige; achievement; creativity; superiority; accumulation of money and wealth; giving and accepting sympathy and protectiveness;

(iv) Social Approval: esteem and respect from others; friendship; affiliation with (desired) groups; conformity with group ideology; beliefs, attitudes and behaviors; giving and accepting sympathy and protectiveness;

(v) Sensuous Gratification: sexual; visual; auditory; smell; taste; tactile;

(vi) Cognitive Consistence and Curiosity: consistency in thinking and opinions; exploring and acquiring knowledge, truth, beauty and religion;

(vii) Self-Actualization: ability to accept and depend on the self, to cease from identifying with others, to rely on one's own standard, to aspire to the "ego-ideal" and to detach oneself from social demands and customs when desirable.

(vi) All functions/components of the flow chart are interconnected. Through time, they interact with one another. For instance, once action is taken (Box 9), say publishing an article, the event and its consequence will be observed and registered in the decision maker's memory (Box 1) and will also likely be observed and interpreted by other parties (Boxes 12 and 13) which may, in turn, react upon the original decision maker (Boxes 7 and 11). (See Hypothesis 8 in [14,17] for information inputs.)

Observe that according to the model, many factors and functions as captioned in the boxes of Flow Chart 1 can affect decision making and our understanding of decision making. These factors and functions are usually beyond description by mathematical equations or probability theory. However, with suitable effort and attention, a person may be able to understand his own behavior.

The dynamic mechanism, although changing with time and with one's psychological states, can stabilize and, unless extraordinary events occur, each individual will have stable habitual patterns for processing information. This observation is captured by the concept of habitual domains.

3 Habitual Domains

It has been recognized that each human being has habitual ways to respond to stimuli. These are sometimes called conditioned or programmed behaviors. For example, each individual has habitual ways of eating, dressing, and speaking. Some habitually emphasize economical gains, while others habitually emphasize social reputation. Some are habitually persistent in their goal pursuit, while others habitually change their objectives. Some are habitually optimistic and see the positive side, while others are habitually pessimistic and see the negative side. Some habitually pay attention to the details; while others only to generalities.

These habitual ways of perceiving, thinking, responding and acting can be captured by the concept of habitual domains (HD). Flow Chart 1 illustrates that HD involve self-suggestions, external information inputs, physiological monitoring, goal setting, state valuation, charge structures, attention and discharges. They also involve encoding, storing, retrieving and interpretation mechanisms. When a particular aspect or function is emphasized, it will be designated as "HD on that function." Thus, HD on self-suggestion, HD on charge structures, HD on attention, etc. all follow. When the responses to a particular event are of interest, we can designate them as "HD on the responses to that event." Thus, HD on job seeking, house purchasing, dealing with friends, etc. also follow. In the following discussion, HD are used without specifying the corresponding functions or events, as only the general properties of HD will be discussed.

3.1 Elements of Habitual Domains

A habitual domain at time t, denoted by HD_t, is defined as the collection of the following:

(i) PD_t (potential domain): The collection of ideas/actions that can be potentially activated at time t;

(ii) AD_t (actual domain): The set of ideas/actions that is actually activated at time t;

(iii) AP_t (activation probability): The activation probability or confidence structure at time t which indicates the possibility for a subset of ideas/actions in PD_t to be in AD_t;

(iv) $R(I_t, O_t)$ (reachable domain): The reachable (attainable) set of ideas/actions from the initial set of ideas I_t through the set of operators O_t.

$R(I_t,O_t)$ shall be described more extensively shortly. Observe that $AD_t \subset PD_t$. The relationship between AD_t and PD_t is similar to that between the realized value and the sampling space of a random variable. The set AD_t will be affected by the charge structures and attention at time t. The probability or confidence level (AP_t) for a set of ideas/actions to be activated will depend on how strongly the ideas/actions have been encoded and how easily the ideas/actions can be retrieved from memory storage. It is also closely related to the set of initially activated ideas around the time t.

Now consider reachable domains. Through self-suggestion and/or external information inputs, one idea or a set of ideas can be used to stimulate or generate other ideas. This suggests that a set of operators exists, defined on the subsets of PD_t, which generate ideas in PD_t from the subsets of PD_t. As an example, suppose that one is interested in investing a fixed amount of cash in stocks A and B. The concept (the operator) that any portfolio (a convex combination) of A and B would also be of interest will expand the alternative set of A and B into the set of all convex combinations of A and B. Note, the operators are also elements of PD_t.

Let I_t be a set of ideas with $I_t \subset PD_t$, and let O_t be a set of operators which generate ideas in PD_t from subsets of PD_t. Define $R(I_t, O_t)$, called reachable domain, to be the set of ideas/actions that can be reached (or attained) from I_t and O_t. More precisely, $R(I_t,O_t)$ is the set of ideas/actions that can be cumulatively generated by any sequence of operators from the set O_t which act on I_t and the resulting ideas/actions from the operations. As an example, let $I_t = \{0,1\}$ and $O_t = \{+\}$ ("+" is the ordinary mathematical addition). Then $R(I_t, O_t)$ is the set of all nonnegative integers. If $O_t = \{+,-\}$, then $R(I_t,O_t)$ is the set of all integers.

Potential and reachable domains are closely related. We say that $\{I_t,O_t\}$ is a generator of PD_t iff $PD_t = R(I_t,O_t)$, and $\{I_t,O_t\}$ is a basis for PD_t iff $\{I_t,O_t\}$ is a generator of PD_t and no strict subset of $\{I_t,O_t\}$ is a generator of PD_t.

Finally we observe that HD_t, as defined, is dynamic and changes with time. All four elements of HD_t can evolve with time: this makes analysis of HD_t fairly difficult. Fortunately, it can be shown that HD_t can reach a stable state; thus, human behaviors are still, to a certain degree, predictable. This will be discussed in the next subsection.

3.2 Stable Habitual Domains: Existence and Significance

In [5], it is shown that PD_t and AP_t depend on the activation of patterns of neural circuits. Under suitable conditions, these patterns will satisfy a system of differential equations with stable steady solutions. Thus, PD_t and AP_t

can reach their stable states unless extraordinary events arrive continuously (which rarely is the case).

Once PD_t and AP_t reach their stable states, one can expect AD_t to occur at some regularity. In such stable states of HD_t, one can expect habitual ways of thinking, responding, and reacting to stimuli and events to occur. Thus, personality, attitude, conditioned or programmed behavior, will be formed for each individual. Such formation has a great impact on decision making styles and optimization theories. The existence of habitual domains has significant implications for high stake decision problems, optimal solutions, gaming and conflict dissolution, career management and leadership. These are described briefly:

(i) On high stake decision problems: Although the four decision elements (alternatives, criteria, perceived outcomes of decisions and preference) can vary with respect to time, information inputs, and psychological states of the decision maker, they can become stabilized (see [4] for an empirical study). Applications of optimization theories to high stake decision problems become feasible. Before the stabilization, a formal analysis using optimization theory is not fruitful. During the transition period it might be better to let our HD_t open and expand, allowing vigilant search for all relevant information on the four decision elements, making sure "good" alternatives are not overlooked.

(ii) On optimal solutions: As decision processes depend on HD_t, so do the resulting optimal solutions. Since HD_t can vary over time (even though it is in a stable state most of the time), optimal solutions will change with time. This occurs when the set of alternatives, the set of criteria, dimension of alternatives, perception of outcomes, and/or preference change. This suggests that in dynamic settings, "time-optimality" is important and that an alternative perceived as optimal is valid only over a time horizon. Today's optimal solution will not necessarily be optimal forever. As HD_t changes, it may become an inferior solution. (See [12,13] for further details.) Being aware of this fact, one can avoid surprise over other people's "irrational" decisions. After all, a decision is rational if and only if it is consistent with the decision maker's HD_t. Everyone's HD_t is unique. What one perceives as irrational may be very rational from other people's point of view (HD_t).

(iii) On gaming and conflict dissolution: Each player has a unique HD_t. Understanding one's own HD_t and one's opponents' HD_t is essential to winning competitive games or resolving conflicts. If one knows his own HD_t but does not know one's opponents' HD_t, one cannot confidently construct a winning strategy. Indeed one could lose the game entirely, like the Pearl Harbor disaster (see [9] for a detailed discussion of the mistake). If one does not know both his own and his opponents' HD_t, he very likely would lose most games.

In games which are partially cooperative and partially competitive (like international trade or companies competing for market share and market volume with the same kinds of products), it may be desirable for the players to settle an agreement. To maintain some stability, this agreement must allow each player to declare a victory --i.e., the terms of agreement must be a time-optimal solution from the point of view of each player's HD_t. Certainly this is not an easy task. Proposing new alternatives, creating new conceptions of the criteria and suggesting outcomes for the players to change their corresponding HD_t will become vital. Without a new set of compatible HD_ts, agreement can hardly be reached. Certainly, to successfully restructure HD_t one must first be aware of the existing HD_t of each player. Instead of using the framework of traditional

game theory, such as described in [11,8], the second order game concepts of using HD_t should be used to resolve nontrivial games or conflict[13].

(iv) On career management: In a broader sense, each social organization (family, company, school, society, nation, etc.) can be regarded as a living entity and can have a habitual domain, HD_t. The habitual domain can also be stabilized. The person within the organization performing a variety of functions also has his own HD_t. The match of these habitual domains is important for considering career success and happiness. If the HD are compatible and if they enhance each other, one may expect a fairly happy individual in the organization; otherwise, conflict and frustration can occur and adjustment must be made in order to keep the individual with the organization.

If human beings are regarded as adapting entities to their environments, then choosing an organization for association become an optimal match problem between an individual's HD_t and the organization's HD_t. Are there ideal organizational HD_t to which an individual can adapt? Can he change the organizational HD_t or is it easier to change his own? Should he leave an organization for a new one which reveals a more compatible HD_t? These are some important questions that each individual must address for career success and deserve careful explorations. (See Holland [7] and citations therein.)

(v) On leadership: Each "group" or social organization, as mentioned before, has its own HD_t which depends, at least partially, on its members' HD_t. A good leader should have a clear picture of the ideal HD_t for the group. Leadership may be defined as moving the current HD_t of the group to an ideal HD_t for the group.

There are two extreme kinds of leadership. One is status-quo leadership which maintains the current HD_t. The other is revolutionary leadership which drastically changes the current HD_t to a new ideal HD_t.

Note that knowing the individual members' HD_t is very important for successful leadership. Indeed, a leader can best motivate members to move the group's HD_t when he can create a high "charge" on the individual members and show the way for them to successfully release the charge. The perceived ideal group HD_t should be compatible with and able to enhance (as perceived by the members) the members' HD_t. Otherwise, resistance and conflicts will hinder the leader's success. (See [1].)

4 Reduction of Fuzziness By Expansion of HD

In the previous subsection, we have discussed how HD_t can become stabilized and the implications and applications of a stable HD_t on various subjects. Stabilized HD_t allows us to process information and to make decisions more effectively and efficiently on daily repetitive problems; it also makes our thinking and behavior predictable. In an extreme, our thinking and behavior may become routine and programmed, when our HD_t become sufficiently rigid and inflexible. As indicated in the previous subsections, in high stake decision problem, conflict resoultion, career management and

leadership, a rigid HD_t cannot successfully offer solution. Indeed, a rigid HD_t may become a major sourve of the problem. Developing a HD_t which can appreciate and understand other HD_t's is a very important step for us to enhance our ability to solve difficult problems and to have a happy career and life.

As discussed before, each problem or system can be represented, in abstract, by a habitual domain HD_t. Ourselve (a researcher, a decision maker, a company or an institution) can also be represented by a habitual domain, denoted by HD_t^o.

Suppose that $HD_t \subset HD_t^o$ for most t. Then we (HD_t^o) can comprehend HD_t most of the time. (Here "$\subset$" is a fuzzy notion, which needs the reader to explore.) On the other hand when $HD_t \cap HD_t^o = \phi$ for most t, it will be very difficult for us (HD_t^o) to comprehend HD_t most of the time. In the lass case, we may be shocked by HD_t when it confronts us and catches our attention at the first time.

The above two extreme cases seldomly occur. In most situations, we don't have total inclusion neither empty intersection. We have "overlapping" relation. That is, $HD_t^o \cap HD_t \neq \phi$, $HD_t \setminus HD_t^o \neq \phi$ and $HD_t^o \setminus HD_t \neq \phi$. In general, the larger is $HD_t^o \cap HD_t$, the better is our perception on HD_t; or the larger is our HD_t^o, the better is the probability that we can have a better comprehension about HD_t.

The following methods can expand our HD_t:

(i) Expand HD_t by awareness and willingness to learn from other people. The largest resource for expanding our HD is other people's HDs. It is safe to say that everyone's HD is almost surely unique. That is, there is virtually zero probability that the HDs of any two persons can be identical. (See [14-17] for further discussion.) By being aware of the difference among HDs, we may begin to be willing and able to spend effort and time to encode and absorb those favorable ideas/operators so as to expand our HD.

Depending on the degree of cooperation, rivalry and intimacy, humans reveal their HDs to their partners, perhaps partially, consciously and/or unconsciously. Their revealed ideas/actions or operators may be accepted or absorbed because they are similar to those of the partners or because the partners make a special effort to do so. The ideas/actions or operators can also be rejected because they are strange to the partners and/or the partners either do not care or activate their self-suggestion to distort and avoid them. The acceptance of rejection will certainly depend on the partners' charge structure and attention, etc. Usually new ideas/actions or operators can be more easily learned and absorbed if they are similar to those which are already known than otherwise. Confronted with ideas which are outside our HD, we may have a tendency to reject then right away instead of taking time and effort to absorb them. This quick rejection to totally new ideas may prevent us from expanding our HD to a higher dimension.

In real life HDs of other people are not easily observed. Recall that the actual domain AD_t is a subset (perhaps very small) of PD_t. Most of the time only a portion of PD_t is observable, and without attention even the observable part of AD_t can be ignored and/or misinterpreted. The following are some important operators/ideas for awareness and absorption of other persons' HDs: (A) sincere appreciation and genuine interest in other persons' abilities, skills and well-being, (B) open minded frank discussion with other people, (c) an attitude that other persons' opinions/beliefs can be right or valid and (D) the willingness to think in terms of the other persons' interests.

(ii) Expand HD_t by considering one higher order of the systems within which we operate. For instance in the stock market investment problem, one can regard the stock market as a subsystem of speculation markets which also include the bond market, option market, futures market, etc., which again is a subsystem of the money-making mechanism. By looking into a higher order system, we can usually broaden our mind and see other ideas/operators which we could not otherwise see.

(iii) Expand HD_t by periodically being aware of our existing HD and seriously questioning the preconceived assumptions and notions in the existing HD_t. Different assumptions and notions will likely produce different conclusions, just like different initial points and dynamics will produce different terminal points, This awareness and questioning can make us discover new ideas and expand our HD.

(iv) Expand HD_t by varing relevant parameters in the thinking process. For instance, in a house purchase decision, one can vary the parameter of how much he can borrow from the bank so as to expand the set of feasible houses to be purchased.

(v) Expand HD_t by actively using "association law." By actively trying to find the similarity and difference between two objects, one may be able to discover new ideas. For instance, in decision making, one may be able to expand the set of alternatives by deliberating the other three elements: criteria, perceived outcomes, and preference. Through this deliberation, some new alternatives may be derived.

(vi) Expand HD_t on specific problems by consulting with experts, previous similar events and books. This consultation can usually provide us new ideas which we could not obtain otherwise.

(vii) Retreat from the specific problem for a while when being trapped by our HD_t and when the above methods offer no help. Turning off the problem has an effect of turning off being trapped. Then start our generating process when our mind is refreshed again. New concepts and vital ideas can be obtained in an easier fashion when our mind is fresh and is not trapped by the previous thinking.

5. Conclusion

We have sketch some main concepts of habitual domains and how can we use them to cope with human fuzziness. The following are some important problems to be explored as to reduce human fuzziness.

(i) Classify fuzzy systems or problems according to their attributes as to describe them as precisely as possible in terms of HD. This will allow us to comprehend the systems or problems better.

(ii) Understand our own HD and expand our own HD so that we can understand the HD of the fuzzy systems or problems better.

A. Maslow,a famous psychologist,says: "If the only tool you have is a hammer, you tend to see every problem as a nail". Shouldn't we expand our horizon of vision (HD) in studying "fuzzy systems"? Let us encourage and help each other!

References

1. Burns, J. M., Leadership, Harper & Row, New York, 1978.

2. Cattell, R. B., Description and Measurement of Personality, World Book Company, 1946.

3. Cattell, R. B., Personality: A Systematic Theoretical and Factual Study, McGraw Hill, 1950.

4. Chan, S. J., Park, C. W., and Yu, P. L., "High-Stake Decision Making - An Empirical Study Based on House Purchase Processes," Human Systems Management, Vol. 3, pp. 91-106, 1982.

5. Chan, S. J., and Yu, P. L., Stable Habitual Domains: Existence and Implications, working paper No. 160, School of Business, University of Kansas, 1984 (to appear in Journal of Math Analysis and Applications).

6. Chan, S. J., and Yu, P. L., "A Dynamic Conflict Resolution Model--Acceptability of Alternatives and Conflict Solvability," working paper No. 161, School of Business, University of Kansas, 1984 (to appear in Journal of Optimization Theory and Applications).

7. Holland, J. L., Making Vocational Choices: A Theory of Careers, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1973.

8. Isaacs, R., Differential Games, John Wiley and Sons, New York, 1965.

9. Janis, I. L., and Mann, L., Decision Making, A Psychological Analysis of Conflict, Choice and Commitment, The Free Press, New York, 1977.

10. Kwon, Y. K., and Yu, P. L. "Conflict Dissolution by Reframing Payoffs Using Linear Perturbations," Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 39, No. 2, Feb, 1983, pp. 187-214.

11. Von Neumann, J., and Morgenstern, O., Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

12. Yu, P. L., "Decision Dynamics with an Application to Persuasion and Negotiation," TIMS Studies in Management Sciences, Vol. 6, North-Holland Publishing Co., New York, 1977.

13. Yu, P. L., "Second-Order Game Problem: Decision Dynamics in Gaming Phenomena," Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 27, No. 1, January, 1979, pp. 147-166.

14. Yu, P. L., "Behavior Bases and Habitual Domains of Human Decision/Behavior-An Integration of Psychology, Optimization Theory and Common Wisdom," International Journal of Systems, Measurement and Decisions, Vol. 1, 1981, pp. 39-62.

15. Yu, P. L., "Dissolution of Fuzziness for Better Decision - Perspective and Technique," Fuzzy Sets and Decision Analysis, Studies in Management Sciences, Vol. 20, (ed. H. J. Zimmerman, L. A. Zadeh & B. R. Gaines), pp. 171-207.

16. Yu, P. L., "Introduction to Decision Dynamics, Second Order Games and Habitual Domains," working paper No. 156, School of Business, University of Kansas, 1982. Presented at AAAS Annual Meeting, Washington, D.C., January, 1982. To appear in MCDM: Past Decade and Future Trends, ed. by M. Zeleny).

17. Yu, P. L., Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions, (to be published by Plenum Publishing Corporation).

18. Yu, P. L., and Huang, S. D., Behavior Bases and Habitual Domains - Theory and Applications (first draft Ch. 1 Introduction, Ch. 2 Behavior Bases, Ch. 3 Observations from Social Psychology, Ch. 4 Habitual Domains, Ch. 5 Personality, Ch. 6 Decision Dynamics, Ch. 7 Second Order Games, Ch. 8 Conflict Resolution, Ch. 9 Career Management, Ch. 10 Leadership).

19. Zimbardo, P. G., and Ruch, F. L., Psychology and Life, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1975.

INTERACTIVE DECISION MAKING FOR MULTIOBJECTIVE NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH FUZZY PARAMETERS

Masatoshi SAKAWA
Faculty of Engineering, Kobe University
Hitoshi YANO
College of Economics, Kagawa University

1. Introduction

In the multiobjective nonlinear programming problem, there is no optimal solution due to the inherent conflict between these objectives. Consequently, the aim is to find the satisficing solution of the decision maker (DM) which is also Pareto optimal. However, when formulating the multiobjective nonlinear programming problem which closely describes and represents the real decision situation, various factors of the real system should be reflected in the description of the objective functions and the constraints. Naturally these objective functions and the constraints involve many parameters whose possible values may be assigned by the experts. In the conventional approach, such parameters are fixed at some values in an experimental and/or subjective manner through the experts' understanding of the nature of the parameters.

In most practical situations, however, it is natural to consider that the possible values of these parameters are often only ambiguously known to the experts. In this case, it may be more appropriate to interpret the experts' understanding of the parameters as fuzzy numerical data which can be represented by means of fuzzy subsets of the real line known as fuzzy numbers[1),2)]. The resulting multiobjective nonlinear programming problem involving fuzzy parameters would be viewed as the more realistic version of the conventional one.

In this paper, in order to deal with the multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters characterized by fuzzy numbers, the concept of α-Pareto optimality is introduced by extending the ordinary Pareto optimality on the basis of the α-level sets of the fuzzy numbers. Then an interactive decision making method to derive the satisficing solution of the decision maker (DM) efficiently from among an α-Pareto optimal solution set is presented as a generalization of the results obtained in Sakawa et al.[4)].

2. α-Pareto optimality

In general, the multiobjective nonlinear programming (MONLP) problem is represented as the following vector-minimization problem:

$$\left.\begin{array}{l} \min f(x) \underset{=}{\Delta} (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))^T \\ \text{subject to} \quad x \in X = \{ x \in E^n \mid g_j(x) \underset{=}{\leq} 0,\ j=1,\ldots,m \} \end{array}\right\} \quad (1)$$

where x is an n-dimensional vector of decision variables, $f_1(x),\ldots,f_k(x)$ are k distinct objective functions of the decision vector x, $g_1(x),\ldots,g_m(x)$ are inequality constraints, and X is the feasible set of constrained decisions.

In practice, however, it would certainly be appropriate to consider that the possible values of the parameters in the description of the objective functions and the constraints usually involve the ambiguity of the experts' understanding of the real system. For this reason, in this

paper, we consider the following fuzzy multiobjective nonlinear programming (FMONLP) problem involving fuzzy parameters:

FMONLP

$$\left.\begin{array}{l} \min\ f(x,\tilde{a}) \triangleq (f_1(x,\tilde{a}_1), f_2(x,\tilde{a}_2), \ldots, f_k(x,\tilde{a}_k))^T \\ \text{subject to}\ \ x \in X(\tilde{b}) \triangleq \{\, x \in E^n \mid g_j(x,\tilde{b}_j) \leqq 0,\ j=1,\ldots m \,\} \end{array}\right\} \quad (2)$$

where $\tilde{a}_i$ and $\tilde{b}_j$ represent respectively a vector of fuzzy parameters involved in the objective function $f_i(x,\tilde{a}_i)$ and the constraint function $g_j(x,\tilde{b}_j)$.

These fuzzy parameters are assumed to be characterized as the fuzzy numbers introduced by Dubois and Prade[1),2)].

We now assume that $\tilde{a}_i$ and $\tilde{b}_j$ in the FMONLP are fuzzy numbers whose membership functions are $\mu_{\tilde{a}_i}(a_i)$ and $\mu_{\tilde{b}_j}(b_j)$ respectively. For simplicity in the notation, define the following vectors:

$$\mu_{\tilde{a}}(a) = (\mu_{\tilde{a}_1}(a_1), \ldots, \mu_{\tilde{a}_k}(a_k)), \quad \mu_{\tilde{b}}(b) = (\mu_{\tilde{b}_1}(b_1), \ldots, \mu_{\tilde{b}_m}(b_m)),$$

$$a = (a_1, \ldots, a_k), \quad \tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k), \quad b = (b_1, \ldots, b_m), \quad \tilde{b} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m).$$

Then we can introduce the following α-level set or α-cut [2)] of the fuzzy numbers $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$.

Definition 1. (α-level set)

The α-level set of the fuzzy numbers $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ is defined as the ordinary set $L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b})$ for which the degree of their membership functions exceeds the level α:

$$L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b}) = \{\, (a,b) \mid \mu_{\tilde{a}}(a) \geqq \alpha,\ \mu_{\tilde{b}}(b) \geqq \alpha \,\} \quad (3)$$

It is clear that the level sets have the following property:

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \ \text{ if and only if } \ L_{\alpha_1}(\tilde{a},\tilde{b}) \supset L_{\alpha_2}(\tilde{a},\tilde{b})$$

For a certain degree α, the FMONLP (2) can be understood as the following nonfuzzy α-multiobjective nonlinear programming (α-MONLP) problem.

α-MONLP

$$\left.\begin{array}{l} \min\ f(x,a) \triangleq (f_1(x,a_1), f_2(x,a_2), \ldots, f_k(x,a_k))^T \\ \text{subject to}\ \ x \in X(b) \triangleq \{x \in E^n \mid g_j(x,b_j) \leqq 0,\ j=1,\ldots,m\} \\ \qquad\qquad (a,b) \in L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b}) \end{array}\right\} \quad (4)$$

It should be emphasized here that in the α-MONLP the parameters (a,b) are treated as decision variables rather than constants.

On the basis of the α-level sets of the fuzzy numbers, we introduce the concept of α-Pareto optimal solutions to the α-MONLP.

Definition 2. (α-Pareto optimal solution)

$x^* \in X(b)$ is said to be an α-Pareto optimal solution to the α-MONLP(4), if and only if there does not exist another $x \in X(b)$, $(a,b) \in L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b})$ such that $f_i(x,a_i) \leqq f_i(x^*,a_i^*)$, $i=1,\ldots,k$, with strict inequality holding for at least one i, where the corresponding values of parameters (a^*,b^*) are

called α-level optimal parameters.

In order to generate a candidate for the satisficing solution which is also α-Pareto optimal, the DM is asked to specify the degree α of the α-level set and the reference levels of achievement of the objective functions, called reference levels.
For the DM's degree α and reference levels $\bar{f}_i$, i=1,...,k, the corresponding α-Pareto optimal solution, which is in a sense close to his requirement (or better, if the reference levels are attainable) is obtained by solving the following minimax problem.

$$\begin{array}{ll} \min & \max \ (f_i(x,a_i) - \bar{f}_i) \\ x \in X(b) & 1 \leqq i \leqq k \\ (a,b) \in L_\alpha(a,b) & \end{array} \tag{5}$$

or equivalently

$$\begin{array}{ll} \min & v \\ x,v,a,b & \\ \text{subject to} & \end{array} \tag{6}$$

$$f_i(x,a_i) - \bar{f}_i \leqq v, \quad i=1,\ldots,k \tag{7}$$

$$\mu_{\tilde{a}}(a) \geqq \alpha , \quad \mu_{\tilde{b}}(b) \geqq \alpha \tag{8}$$

$$x \in X(b) \tag{9}$$

The relationships between the optimal solutions of the minimax problem and the α-Pareto optimal concept of the α-MONLP can be characterized by the following theorems.

Theorem 1.
x^* is an α-Pareto optimal solution and (a^*,b^*) is an α-level optimal parameter to the α-MONLP, if and only if there exists $\bar{f} = (\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_k)$ such that (x^*,v^*,a^*,b^*) is a unique optimal solution to the minimax problem.

If (x^*,v^*,a^*,b^*), an optimal solution to the minimax problem, is not unique, then we can test the α-Pareto optimality for x^* by solving the following problem:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \\ \text{subject to} & f_i(x,a_i) + \epsilon_i = f_i(x^*,a_i^*), \quad \epsilon_i \geqq 0, i=1,2,\ldots,k. \\ & x \in X(b), \quad (a,b) \in L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b}). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Let $(\bar{x},\bar{a},\bar{b})$ be an optimal solution to (10). If all $\epsilon_i = 0$, then x^* is an α-Pareto optimal solution. If at least one $\epsilon_i > 0$, it can easily be shown that $\bar{x}$ is an α-Pareto optimal solution.
It is significant to note here that from the property of the α-level set, the following relation holds for any two optimal solutions (x^1,v^1,a^1,b^1) and (x^2,v^2,a^2,b^2) to the minimax problems corresponding to α^1 and α^2 with the same reference levels:

$$\alpha^1 \leqq \alpha^2 \quad \text{if and only if} \quad f_i(x^1,a_i^1) \leqq f_i(x^2,a_i^2) \quad i=1,2,\ldots,k .$$

3. Trade-off rates

Now given the α-Pareto optimal solution for the degree α and the reference levels specified by the DM by solving the corresponding minimax problem, the DM must either satisfy with the current α-Pareto optimal solution, or update the reference levels and/or the degree α. In order to help the DM express his degree of preference, trade-off information between a standing objective function and each of the other objective functions as well as between the degree α and the objective functions is very useful. Fortunately, such a trade-off information is easily obtainable since it is closely related to the strict positive Lagrange multipliers of the minimax problem.

In the following for notational convenience we denote the decision variable in the minimax problem (6)-(9) by $y = (x,v,a,b)$ and let us assume that the minimax problem has a unique local optimal solution y^* satisfying the following three assumptions.

Assumption 1.
y^* is a regular point of the constraints of the minimax problem.

Assumption 2,
The second-order sufficiency conditions are satisfied at y^* .

Assumption 3.
There are no degenerate constraints at y^* .

Then the following theorem is derived by using the implicit function theorem [3] .

Theorem 2.
Let $y^* = (x^*,v^*,a^*,b^*)$ be a unique local solution of the minimax problem (6)-(9) satisfying the assumptions 1,2 and 3. Let $\lambda^* = (\lambda^{f*}, \lambda^{a*}, \lambda^{b*}, \lambda^{g*})$ denote the Lagrange multipliers corresponding to the constraints (7)-(9). Also assume that all the constraints (7) of the minimax problem are active. Then it holds that

$$\left.\frac{\partial f_i(x,a_i)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{a*} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{b*} , \quad i=1,\ldots,k. \tag{11}$$

Regarding a trade-off rate between $f_1(x)$ and $f_i(x)$ for each $i=2,\ldots,k$, it can be proved that the following theorem holds [5].

Theorem 3.
Let all the assumptions in Theorem 2 are satisfied. Also assume that the constraints (7) are active. Then it holds that

$$\left.\frac{\partial f_i(x,a_i)}{\partial f_1(x,a_1)}\right|_{\alpha=\alpha^*} = -\frac{\lambda_1^{f*}}{\lambda_i^{f*}} , \quad i=2,\ldots,k . \tag{12}$$

It should be noted here that in order to obtain the trade-off rate information from (11) and (12), all the constraints (7) of the minimax problem must be active. Therefore, if there are inactive constraints, it is necessary to replace $\bar{f}_i$ for inactive constraints by $f_i(x^*, a_i^*)$ and solve the corresponding minimax problem for obtaining the Lagrange multipliers.

4. Interactive algorithm

Following the above discussions, we can now construct the interactive algorithm in order to derive the satisficing solution for the DM from among the α-Pareto optimal solution set. The steps marked with an asterisk

involve interaction with the DM.

Step 1. Calculate the individual minimum and maximum of each objective function under given constraints for $\alpha = 1$.

Step 2*. Ask the DM to select the initial value of α ($0 < \alpha < 1$) and the initial reference levels $\bar{f}_i$, $i=1,\ldots,k$.

Step 3. For the degree α and the reference levels specified by the DM, solve the minimax problem and perform the α-Pareto optimality test.

Step 4*. The DM is supplied with the corresponding α-Pareto optimal solution and the trade-off rates between the objective functions and the degree α. If the DM is satisfied with the current objective function values of the α-Pareto optimal solution, stop. Otherwise, the DM must update the reference levels and/or the degree α by considering the current values of the objective functions and α together with the trade-off rates between the objective functions and the degree α and return to step 3. Here it should be stressed for the DM that (1) any improvement of one objective function can be achieved only at the expense of at least one of the other objective functions, and (2) the greater value of the degree α gives worse values of the objective functions for some fixed reference levels.

5. Numerical example

To clarify the concept of α-Pareto optimality as well as the proposed method, consider the following three objective nonlinear programming problem.

$$\left.\begin{aligned} \min \quad & f_1(x,\tilde{a}_1) = \tilde{a}_1(x_1-9)^2 + (x_2-6)^2 \\ \min \quad & f_2(x,\tilde{a}_2) = 3x_1 + x_2 - \tilde{a}_2 \\ \min \quad & f_3(x,\tilde{a}_3) = 3x_1 + 5x_2 - \tilde{a}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

subject to

$$x \in X = \{ x \mid x \in E^2,\ g_1(x) = -x_1 \leq 0,\ g_2(x) = -x_2 \leq 0 \}$$

where $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, and $\tilde{a}_3$ are fuzzy numbers whose membership functions are given below :

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\tilde{a}_1}(a_1) &= \max (1 - | a_1 - 1.2 | , 0) , \\ \mu_{\tilde{a}_2}(a_2) &= \max (1 - 2 | a_2 - 5.4 | , 0) , \\ \mu_{\tilde{a}_3}(a_3) &= \max (1 - 0.5 | a_3 - 17.1 | , 0) . \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Now, for illustrative purposes, we shall assume that the hypothetical DM selects the initial value of the degree α to be 0.8, and the initial reference levels $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$ to be (20, 7.5, 7.5) . Then the corresponding α-Pareto optimal solution can be obtained by solving the following minimax problem.

$$\min_{x,v,a} \quad v \qquad (15)$$

subject to

$$a_1(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 6)^2 - 20 \leq v$$

$$3x_1 + x_2 - a_2 - 7.5 \leqq v \tag{16}$$

$$3x_1 + 5x_2 - a_3 - 7.5 \leqq v$$

$$\max\ (\ 1 - |\ a_1 - 1.2\ |\ ,\ 0\ ) \geqq 0.8$$

$$\max\ (\ 1 - 2\ |\ a_2 - 5.4\ |\ ,\ 0\ ) \geqq 0.8 \tag{17}$$

$$\max\ (\ 1 - 0.5\ |\ a_3 - 17.1\ |\ ,\ 0\ ) \geqq 0.8$$

$$-x_1 \leqq 0,\quad -x_2 \leqq 0 \tag{18}$$

Solving this problem, we obtain a unique optimal solution $(x_1^*, x_2^*, v^*) = (5,3,5)$, $(a_1^*, a_2^*, a_3^*) = (1,5.5,17.5)$ and objective values $(f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (25,12.5,12.5)$. This unique optimal solution clearly satisfies the assumptions 1,2 and 3. Considering the second-order sufficiency conditions, the corresponding Lagrange multipliers become $(\lambda_1^{f*}, \lambda_2^{f*}, \lambda_3^{f*}) = (3/11,1/2,5/22)$ and $(\lambda_1^{a*}, \lambda_2^{a*}, \lambda_3^{a*}) = (48/11,1/4,5/11)$ by solving $\nabla L = 0$. Since all the constraints (16) and (17) of the minimax problem (15)-(18) are active, using the results of Theorem 2, the values of the trade-off rates between f_i, $i = 1,2,3$ and α can be obtained as follows :

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*} = \lambda_1^{a*} + \lambda_2^{a*} + \lambda_3^{a*} = \frac{223}{44},\quad i=1,2,3.$$

Concerning the trade-off rates among the objective functions, from the results of Theorem 3, we have

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right|_{\alpha=\alpha^*} = -\frac{\lambda_2^{f*}}{\lambda_1^{f*}} = -\frac{11}{6},$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right|_{\alpha=\alpha^*} = -\frac{\lambda_3^{f*}}{\lambda_1^{f*}} = -\frac{5}{6}.$$

Observe that the DM can obtain his satisficing solution from among an α-Pareto optimal solution set by updating his reference levels and/or the degree α on the basis of the current values of the objective functions and α together with the trade-off rates among the values of the objective functions and the degree α.

References

[1] D.Dubois and H.Prade, Operations on fuzzy numbers: Int. J. Systems Sci. ; 9 ; 6 ; 613-626 (1978).

[2] D.Dubois and H.Prade, Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications : Academic Press ; (1980).

[3] A.V.Fiacco, Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming : Academic Press ; (1983).

[4] M.Sakawa, T.Yumine and H.Yano, An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Nonlinear Programming Problems : International Institute for Applied Systems Analysis, Collaborative Paper CP-84-18 ; (1984).

[5] H.Yano and M.Sakawa, Trade-off rates in the weighted Tchebycheff norm method, Trans. S.I.C.E. ; 21 ; 3 ; 248-255 (1985) (in Japanese).

On Some Stochastic Control Processes in a Fuzzy Environment

Toshio Odanaka

ABSTRACT

Much of the control processes in real world takes place in an environment in which the goals, the constraints and the consequences of possible actions are not known precisely. To deal quantitatively with imprecision, we usually employ the concepts and techniques of probability theory, etc. This, in our view, is a questionable assumption. Our intention is that there is a need for differentiation between randomness and fuzziness. By fuzziness, we mean a type of imprecision which is associated with fuzzy sets, that is, classes in which there is no sharp transition from membership to membership.

Aim of this paper is to make minimize the membership function that the state variables over all stage exceeds the fixed levels, starting with the inicial state C, in a fuzzy environment and draw attention to problems involving feedback control processes in a fuzzy environment.

Member of Mathematical Society of Japan.
Metropolitan College of Technology, Tokyo.

1. Introduction

A lot of the control processes in the real world take place in an environment in which the goals, the constraints and the consequences of possible actions are not known precisely. To deal quantitatively with imprecision, we usually employ the concepts and techniques of probability theory and, more particularly, the tools provided by decision theory, control theory and information theory. In doing so, we are tacitly accepting the premise that imprecision can be quoted with randomness. This, in our view, is a questionable assumption.

Specifically, our intention is that there is a need to distinguish between randomness and fuzziness, the latter being a major source of imprecision in many decision processes. By fuzziness, we mean a type of imprecision which is associated with fuzzy sets, that is, classes in which there is no sharp transition from membership to membership.[1)]

It should be stressed that our limited purpose in the present paper is to draw attention to problems involving feedback control processes in a fuzzy environment that the input have some membership function.

It requires more investigation to develop a general theory of control processes in which fuzziness and randomness may enter in a variety of ways and combinations.

2. Mathematical Model

Let us consider problems involving some stochastic control processes in a fuzzy environment.

Let us assume that the state at time $t + 1$ in stochastic system is described by

(2.1) $$x_{t+1} = ax_t + u_t + \gamma_t, \quad (t = 0, 1, \cdots),$$

where the state x_t, at time t, range over a finite set and the input u_t range over a finite set and the random variable r_t is assumed to be characterized by a probability density function $\varphi(r)$.

We assumed that at each time t the input u_t is subjected to a fuzzy constraint C^t, which is a fuzzy set characterized by a membership function $\mu_t(u_t)$.

Let us discuss the problem of minimizing some membership function over a finite periods or an infinite periods in fuzzy goal. When problems are in nonfuzzy environment, the optimal policy may become identical with the special case of the optimal policy of a fuzzy environment and the membership function may become the probability.

We define $f_k(c)$ as the membership function that x_t run out from the range (β, α) arting with an initial state C at stage k and ending at stage $(N - 1)$, using an optimal policy, in a fuzzy goal, subjected to the fuzzy constraints. That is

$$f_{k,N-1}(C) = \min_{u_k \sim u_{N-1}} \left[\mu_k(u_k) \vee \cdots \vee \mu_{N-1}(u_{N-1}) \vee \text{Prob}\left\{ \left(\max_{k \le n \le N-1} x_n \ge \alpha \right) \text{ or } \left(\min_{k \le n \le N-1} x_n \le \beta \right) \right\} \right] \tag{2.2}$$

where $x_k = C_1 (k = 0, 1, 2, \ldots, N-2)$, in a fuzzy goal,

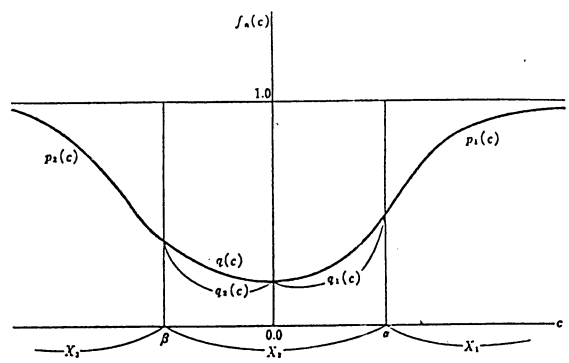
$$\begin{aligned} A &= \{(c, p_1(1))\} \\ B &= \{(c, p_2(c))\} \\ C &= \{(c, q(c))\} = \{(c, q_1(c)) \quad (c, q_2(c))\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

where $p_1(c)$, $p_2(c)$ and $q(c)$ are termed the grade of membership of C in A, B and C. Then, we have for $k = 1, 2, \ldots, N - 2$

$$(2.4)\qquad f_{k,N-1}(c) = \begin{cases} p_1(c), & (c \geq \alpha) \\ \min\limits_{w} \max \left[\begin{array}{l} u(w-c) \\ \int_{\alpha-w}^{\infty} p_1(w+y) g(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\beta-w} p_2(w+y) g(y)\,dy \\ \quad + \int_{\beta-w}^{\alpha-w} f_{k+1,N-1}(w+y) g(y)\,dy \end{array} \right. & (\beta < c < \alpha) \\ p_2(c), & (c \leq \beta) \end{cases}$$

with

$$(2.5)\qquad f_{N-1,N-1}(c) = \begin{cases} p_1(c), & (c \geq \alpha) \\ q(c), & (\beta < c < \alpha) \\ p_2(c), & (c \leq \beta) \end{cases}$$



where $w = ax + y$.

3. Existence and Uniquess Theorem

We must establish existence and uniqueness theorem of equation (2.5) when $N \to \infty$. Let us impose the following conditions of $g(y)$, $p_1(y)$, $p_2(y)$ and $q(y)$.

(3.1)

(a) for all y, $\varphi(y) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,dy = 1$ and for all w

$$\int_{\beta-w}^{\alpha-w} \varphi(y)\,dy \leq a < 1.$$

(b) $$0 \leq p_1(y) \leq 1, \quad 0 \leq p_2(y) \leq 1, \quad 0 \leq q(y) \leq 1$$

(c) $p_1(y)$, $q_1(y)$ are monotone increasing continuous functions and $p_2(y)$, $q_2(y)$ are monotone decreasing continuous functions.

(d) $u(\cdot)$ is bounded and continuous function.

Then, under those conditions, we have the results.

Theorem 1. There is a unique solution to (2.4) which is bounded and continuous for C in the finite interval (β, α).

Let $f_{N-1,N-1}(C)$ be defined over all C with (2.5) Definite the sequence $\{f_{k,N-1}(C)\}$ as follows.

(3.2)
$$f_{k,N-1}(C) = \begin{cases} p_1(C), & (C \geq \alpha) \\ \min_{m} \max \begin{bmatrix} u(w-C) \\ T(w, C, f_{k+1,N-1}) \end{bmatrix}, & (\beta < C < \alpha) \\ p_2(C), & (C \leq \beta) \end{cases}$$

Then $f_k(C) = \lim_{N \to \infty} f_{k,N-1}(C)$ exist for all C and is the solution of

(3.3)
$$f_k(C) = \begin{cases} p_1(C), & (C \geq \alpha) \\ \min_{m} \max \begin{bmatrix} u(w-C) \\ T(w, C, f_{k+1}) \end{bmatrix}, & (\beta < C < \alpha) \\ p_2(C), & (C \leq \beta) \end{cases}$$

where, to simplify the subsequent notation,

$$(3.4)\quad T(v;c,f)=\int_{\alpha-v}^{\infty}p_1(v+y)g(y)dy+\int_{-\infty}^{\beta-v}p_2(v+y)g(y)dy+\int_{\beta-v}^{\alpha-v}f(v+y)g(y)dy$$

In this case,

$$(3.5)\quad T(v;c,f_{t+1})=\int_{-\infty}^{\infty}m_{t+1}(v+y)g(y)dy$$

where

$$m_{t+1}(v+y)=\begin{cases}p_1(v+y), & (\alpha-v<y<\infty)\\ f_{t+1}(v+y), & (\beta-v<y<\alpha-v)\\ p_2(v+y), & (-\infty<y<\beta-v)\end{cases}$$

References

[1] R.E. Bellman and L.A. Zadeh: Decision-Making in a Fuzzy Environment: Management Science, Vol. 17, No. 4 (1970) p. 141 - 161.

[2] T. Odanaka: On some Stochastic Control Processes, University of Southern California Technical Report (1969), USCEE 238.

[3] S. Karline and H. Rubin: The Theory of Decision Procedures for Distributions with Monotone Likelihood Ratio, Ann. Math. Stat. XXVII (1956), p. 272 - 299.

[4] T. Odanaka: Stochastic Control Processes and Management Science, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 104, No. 1, (1984).

An Application of Fuzzy Integrals to Multi-Attribute Decision Problems.

H.ICHIHASHI, H.TANAKA AND K.ASAI
Department of Industrial Elgineering, College of Engineering.
University of Osaka Prefecture.
804 Mozu-Umemachi 4-cho, Sakai, Osaka 591, Japan

1. Introduction

A decision in a "fuzzy environment" has been defined by R.Bellman and L.A.Zadeh [1] as the intersection of fuzzy sets of goals and constraints. The decision as the intersection of fuzzy sets by applying the minimum operater implies that there is no compensation between membership values of alternatives [10]. H.-J.Zimmermann [15] proposed a "latent connective" which map between the minimum and the maximum membership values. We propose to apply integrals based on (NSA) type $\perp$-decomposable measures [11] by W.Schwyla [6] and R.Kruse [3] for aggregation operators of fuzzy sets. These operators imply various degree of compensation.

2. Fuzzy Integrals

Let $(X,\mathcal{B})$ denotes some measurable space. B is measurable set in $\mathcal{B}$. m is $\perp$-decomposable measure of the type (NSA)[11]. t-Conorm $\perp$ has a normed generator g. $m(\emptyset)=0$, $m(X)=1$, $g\circ m : \mathcal{B} \to [0, 1]$ is the probability measure. Then we have

$$m(B_i) \perp m(B_j) = g^{-1}((g\circ m)(B_i) + (g\circ m)(B_j)) \quad (1)$$

where $B_i \cap B_j = \emptyset$.

By defining a multiplication as

$$a \top m(B_i) = g^{-1}(g(a).(g\circ m)(B_i)) \quad (2)$$

where $0 \le a \le 1$, we have a semi-distributive property of $\top$ and $\perp$ in an algebraic system.

$$1)\ a \top (m(B_i) \perp m(B_j)) = g^{-1}(g(a).((g\circ m)(B_i) + (g\circ m)(B_j)))$$
$$= g^{-1}(g(a).(g\circ m)(B_i) + g(a).(g\circ m)(B_j))$$
$$= (a \top m(B_i)) \perp (a \top m(B_j)) \quad (3)$$

$$2)\ (m(B_i) \perp m(B_j)) \top a = (m(B_i) \top a) \perp (m(B_j) \top a) \quad (4)$$

Using the multiplication $\top$ and $\perp$-decomposable measure m an integral is defined as in [6].

Definition 1. For simple function $u = \sum_{i=1}^{n} u_i 1_{B_i}$ with disjoint B_i, $0 \le u_i \le 1$, a fuzzy integral is defined as

$$\int_B u \top m = \bigperp_{i=1}^{n} u_i \top m(B_i)$$

$$= g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(g(u_i)).((g\circ m)(B_i)\right) \qquad (5)$$

Proposition 1. When B=X, fuzzy integrals in Definition 1 take values between $\min u_i$ and $\max u_i$. If $u_1 = \cdots = u_n$ then they take u_1.

Proof. Let $u^\wedge$ be a minimum value of u_i. Since $\top$ and $\perp$ are non decreasing and distributive,

$$u_i \top m_i \geq u^\wedge \top m_i \qquad (6)$$

and

$$\bigperp_{n=1}^{n} u_i \top m_i \geq \bigperp_{i=1}^{n} u^\wedge \top m_i = u^\wedge \top (\bigperp_{i=1}^{n} m_i) = u^\wedge \qquad (7)$$

Let $u^\vee$ be a maximum value of u_i,

$$\bigperp_{i=1}^{n} u_i \top m_i \leq \bigperp_{i=1}^{n} u^\vee \top m_i = u^\vee \top (\bigperp_{i=1}^{n} m_i) = u^\vee \qquad (8)$$

From Proposition 1, the integral of Definition 1 can be regarded as a mean value and when m is probability measure in the case of $g(x)=x$, it is the conventional mean value. Thus it is called a fuzzy expected value. Let us show three types of integrals that have following properties.

1) Yager's family of t-conorms[2].

$$g(x)= x^p \qquad (9)$$

$$x \perp y = \min [(x^p + y^p)^{1/p} , \quad 1] \qquad (10)$$

$$x \top y = x.y \qquad (11)$$

$$\int_X u \top m = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p . \varrho_i \right)^{1/p} \qquad (12)$$

where $\varrho_i = g(m_i)$.

$$\lim_{p\to\infty} \int_X u \top m = \bigvee_{i=1}^{n} u_i \qquad (13)$$

where v denotes max.

$$\lim_{p\to 1} \int_X u \top m = \sum_{i=1}^{n} u_i . \varrho_i \qquad (14)$$

$$\lim_{p\to 0} \int_X u \top m = \prod_{i=1}^{n} u_i^{\varrho_i} \qquad (15)$$

When $m_1=m_2= \cdots = m$ in (15)

$$\lim_{p\to 0} \int_X u \top m = \left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)^{1/n} \qquad (16)$$

2) C-dual of Yager's family of t-norms[2].

$$g(x)=1-(1-x)^{p} \tag{17}$$

$$x\perp y = 1-\max[((1-x)^{p} + (1-y)^{p} - 1)^{1/p}, 0] \tag{18}$$

$$x\top y = 1 - ((1-x)^{p} + (1-y)^{p} - (1-x)^{p}(1-y)^{p})^{1/p} \tag{19}$$

$$\int_X u\top m = 1 - (\sum_{i=1}^{n} (1-u_i)^{p} \rho_i)^{1/p} \tag{20}$$

$$\lim_{p\to 0} \int_X u\top m = 1- \prod_{i=1}^{n} (1-u_i)^{\rho_i} \tag{21}$$

$$\lim_{p\to 1} \int_X u\top m = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \rho_i \tag{22}$$

$$\lim_{p\to \infty} \int_X u\top m = \bigwedge_{i=1}^{n} u_i \tag{23}$$

where $\wedge$ denotes min.

3) Sugeno's parametered family of t-conorms[2]

$$g(x)=(\log(1+px))/(\log(1+p)) \tag{24}$$

$$x\perp y = \min[x+y+pxy,1] \tag{25}$$

$$x\top y = (1/p)((1+px)^{\log(1+py)/\log(1+p)} - 1) \tag{26}$$

$$\int_X u\top m = (1/p)(\prod_{i=1}^{n} (1 + pu_i)^{\rho_i} - 1) \tag{27}$$

$$\lim_{p\to -1} \int_X u\top m = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - u_i)^{\rho_i} \tag{28}$$

$$\lim_{p\to 0} \int_X u\top m = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \rho_i \tag{29}$$

$$\lim_{p\to \infty} \int_X u\top m = \prod_{i=1}^{n} (u_i^{\rho_i}) \tag{30}$$

(28), (29) and (30) are equal to (21), (14) and (16) respectively. R.Kruse stated this type of fuzzy integral in [3].

The range of value of fuzzy integrals are shown in Fig.1. Graphs of fuzzy integrals are shown in Fig.2 - Fig.4. In Fig.2 u_1 and u_2 are substitutive and in Fig.4 they are complimentary.

3. An application to multi-attribute decision problems.

Assuming that the decision maker has pseudo additive weights of significance for each attribute, a pseudo additive weighting method of multi-attribute decision problems is to find out the most preferable alternative such as

$$x^{*} = [\, x_j \mid \max_{j} \bigperp_{i=1}^{n} u_{ij} \top m_i \,] \tag{31}$$

where $\bigperp_{i=1}^{n} m_i = 1$ and u_{ij} is the evaluated value of the i-th attribute of the j-th alternative. (31) is a generalization of following conventional decision problems.

Simple additive weighting method.

$$x^* = [\, x_j \mid \max_j \sum_{i=1}^{n} u_{ij} \cdot m_i \,] \tag{32}$$

Max min decision plinciple

$$x^* = [\, x_j \mid \max_j \min_i u_{ij} \,] \tag{33}$$

Max max decision plinciple

$$x^* = [\, x_j \mid \max_j \max_i u_{ij} \,] \tag{34}$$

The preference order of alternatives by pseudo additive weighting methods is not necessalily order isomorphic with that of the simple additive weighting method. Therefore they imply various degree of compensation between attributes.

We apply pseudo additive weighting method to the empirical data of quality evaluation of titles in [15]. The membership scales for ' good solidity', 'good dovetailing' and 'ideal tite' are shown in Table1. By assuming three kinds of integrals 1), 2) and 3), we determine the most fitting generator as $g(x)=(\log(1+px))/\log(1+p)$, $(p=7.22)$ which minimize the sum of absolute errors from observed data. The grade of significance of the attribute solidity is 0.22 and that of the attribute dovetailing is 0.31. The observed values and the computed values are shown in Fig.5.

Table 2. The comparison of goodness of fit.

	max min	max max	simple additive weighting method	fuzzy additive weighting method
sum of absolute errors	2.76	6.17	1.740	0.93

As $p>0$, two attribute 'solidity' and 'dovetailing' are mutually complementary.

4. An application to multi-objective linear programming problems.

The multi-objective linear programming (MOLP) problem is represented as

$$\begin{aligned} &\max \ \mathbf{a}_i \mathbf{x} \\ &\text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in C \\ &\qquad (\, i=1,\cdots,n \,) \end{aligned} \tag{35}$$

where $\mathbf{a}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik})$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_k)^t$ and C is a convex set formed by linear constraints.

In order to find a compromise solution of the decision maker(DM), Sakawa[6] classified the fuzzy programming in three types as follows.

i) Maximizing a fuzzy decision set as in [9] and [13]

$$\begin{aligned} &\max \ \min_i u_i(\mathbf{x}) \\ &\text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in C \end{aligned} \tag{36}$$

ii) Maximizing a sum fuzzy decision set as in [7]

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} u_i(\mathbf{x}) \qquad (37)$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in C$$

iii) Maximizing a product fuzzy decision set as in [13]

$$\max \quad \prod_{i=1}^{n} u_i(\mathbf{x}) \qquad (38)$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in C$$

Let us consider the FMOLP problem in [13] and [14]. In this FMOLP problem, fuzzy objective functions are characterized by its membership function and so are the constraints. Thus the constraints are also regarded as objective functions. A decision in a fuzzy environment is defined as the selection of activities which simultaneously satisfy these objective functions and the maximizing decision proposed by Bellman and Zadeh uses mini operator for the intersection of fuzzy sets. The FMOLP problem can be written as

$$\mathbf{a}_i \mathbf{x} \gtrsim b_i \quad (i = 1,---,n) \qquad (39)$$

where goals are represented by fuzzy sets $\tilde{b}_i$ that have linear membership functions as in Fig.6. This problem is described by verbal expression. An interpretation of (39) is the following: Make a decision x in such a way that the restriction $\mathbf{a}_i \mathbf{x} \geq b_i$ (i=1,---,n) are satisfied " as well as possible". The decision maker is prepared to tolerate violations, s_i, up to $d_i \geq 0$. Thus the following problem can be formulated [13].

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_i u_i \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_i \mathbf{x} + s_i \geq b_i \\ & d_i . u_i + s_i = d_i \\ & (\mathbf{x}, s_i \geq 0,\ 0 \leq u_i \leq 1,\ i=1,---,n) \end{aligned} \qquad (40)$$

where $s_i=0$ when the set "greater than b_i" is crisp, i.e. $d_i=0$.

FMOLP(40) uses min operator to aggregate fuzzy sets of goals. The mini operator implies that there is no compensation between the memberships to goals. It was reported by testing empirically in [10] that compensatory effects between objectives are present in managerial decisions. Thus in this paper, generalizing the above FMOLP problem, we consider the following FMOLP problem.

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_X u \top m = \bot_{i=1}^{n} u_i \top m_i = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g(u_i).g(m_i)\right) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_i \mathbf{x} + s_i \geq b_i \\ & d_i . u_i + s_i = d_i \\ & (\mathbf{x}, s_i \geq 0,\ 0 \leq u_i \leq 1,\ i=1,---,n) \end{aligned} \qquad (41)$$

In the FMOLP problem (41), fuzzy sets of goals are aggregated by fuzzy integrals. Depending upon the generater g, (41) expresses

various degree of compensation amoung fuzzy goals.

In (14) when $m_1=m_2=$ --- m_n, FMOLP (41) is equivalent to the case ii)[7]. (18) is a geometric mean and is equevalent to the product operator in the case iii)[13], if it is applied to FMOLP (41). (23) is equivarent to the min operator in the case i)[13].

The maximizing problem (41) is equivalent to the minimizing problem whose objective function is

$$\min \quad 1 - \int_X u_T m \tag{42}$$

Thus in the case 2) the objective function is written as

$$\min \quad \left(\sum_{i=1}^{n} (1-u_i)^p \cdot \mathcal{S}_i\right)^{1/p} \tag{43}$$

When $p \geq 1$, FMOLP (41) is reduced to a MOLP based on the concept of compromize solution by P.L.Yu[12], where utopia point of the membership function u_i is 1 and (43) means to minimize the distance function from the utopia point.

By assuming three types of fuzzy integrals the FMOLP problem (41) expresses various degree of compensation between fuzzy goals depending on the parameter p. Furthermore it can express the grade of importance of each goal by m_i.

When the generator g and m_i's are known, the FMOLP (41) is reduced to a non-linear programming problem. g is a monotone function from [0,1] onto [0,1]. Thus the objective function $g^{-1}(\sum_{i=1}^{n} g(u_i).g(m_i))$ is a monotone increasing function of u_i. If the generator g is upward convex function, i.e. $p \leq 1$ in 1) or $p \geq 1$ in 2) or $p \geq 0$ in 3), the FMOLP (41) is a convex programming problem. Thus it can be approximated by the LP approach where p=1 in 1), 2) or p=0 in 3) and solved by a traditional non-linear search technique. The solution by this algorithm is not necessarily pareto optimal. Therefore the test of pareto optimality by Sakawa[4] should be applied and an optimal solution is determined.

If the generator g is downward convex, the objective function of (41) is also downward convex and monotone increasing of u_i. Considering the MOLP problem such as

$$\begin{aligned} \max \quad & u_i \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_i \mathbf{x} + s_i \geq b_i \\ & d \cdot u_i + s_i = d_i \\ & (\mathbf{x}, s_i \geq 0,\ 0 \leq u_i \leq 1,\ i=1, \text{---}, n) \end{aligned} \tag{44}$$

we find a set of nondominated extreme points of the convex set formed by the linear constraints. Then we determine an optimal solution which maximize the objective function of (41) from those extreme points.

References.

[1] BELLMAN, R.E. and ZADEH, L.A. : Decision Making in a Fuzzy Environment. Management Science, Vol.17, No.4, (1970), 141-164.
[2] DUBOIS, D. and PRADE, H.: A class of fuzzy measures based on triangular norms. International Journal of General Systems, Vol.8, (1982), 43-61.
[3] KRUSE, R. : Fuzzy integrals and conditional fuzzy measures. Fuzzy Sets and Systems, Vol.10, No.3, (1983), 309-313.
[4] SAKAWA, M.:Interactive computer programs for fuzzy linear programming with multiple objectives. International Journal of Man-Machine Studies, Vol. 18, No. 5, (1983), 489-503.
[5] SAKAWA, M., YUMINE, T. and NANGO, Y. : Interactive fuzzy decisionmaking for multiobjective nonlinear programming problems. The Transaction of the Institute of Electronics and communication Engineers of Japan, Vol. J66-A, No. 12, (1983), 1243-1250.
[6] SCHWYHLA, W.:About the isomorphism between some sugeno-measures and classical measures. Proc. of the 2nd International Seminar on Fuzzy Set Theory (ed. E.P.Klement) (1982), 344-355.
[7] SOMMER, G. and POLLATSCHEK, M.A. : Fuzzy programming Approach to an air polution reguration problem. Progress in Cybernetics and Systems Research, Vol.3, edited by Trapple, R., G.J.Klir and L.Ricciard, Hemispher Publ. Corp., (1978), 303-313.
[8] SUGENO, M.: Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications. Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology, 1974.
[9] Tanaka, H., Okuda, T and Asai, K.: On fuzzy mathematical programming. Journal of Cybernet, Vol.3, No.4, (1974), 37-46 .
[10]Thole, U., Zimmermann, H.-J. and Zysno.P, : On the suitability of minimum and product operators for the intersection of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, Vol.2, No.2, (1979), 167-180.
[11]WEBER, S.: $\perp$-Decomposable measures and integrals for Archimedian t-conorms $\perp$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.101, No.1, (1984), 114-138.
[12]YU, P.L.: A class of solutions for group decision problems. Management Science, Vol.19, No.8, (1973), 936-964.
[13]Zimmerman, H.J.: Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. Fuzzy Sets and Systems Vol.1 No.1, (1978), 45-55.
[14]Zimmermann, H.-J. : Using fuzzy sets in operational research. Europian Journal of Operational Research, Vol.13, No3, (1983), 201-216.
[15]Zimmermann, H.-J. and Zysno.P, : Latent Connectives in Human Decision Making. Fuzzy sets and Systems, Vol.4, NO.1, (1980), 37-52.

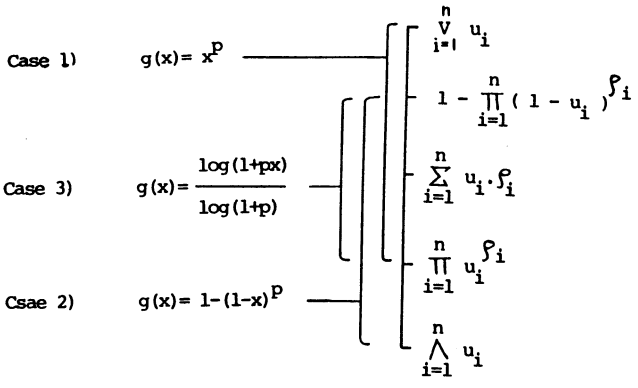


Fig.1 The range of fuzzy integrals.

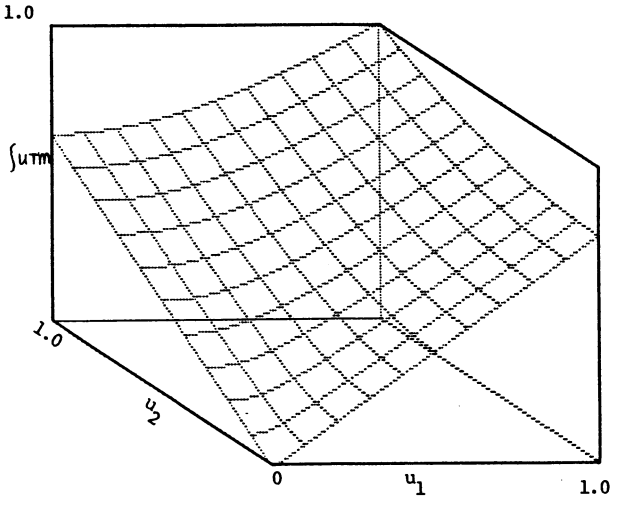


Fig.2 A graph of fuzzy integral ($g(x)=x^2$).

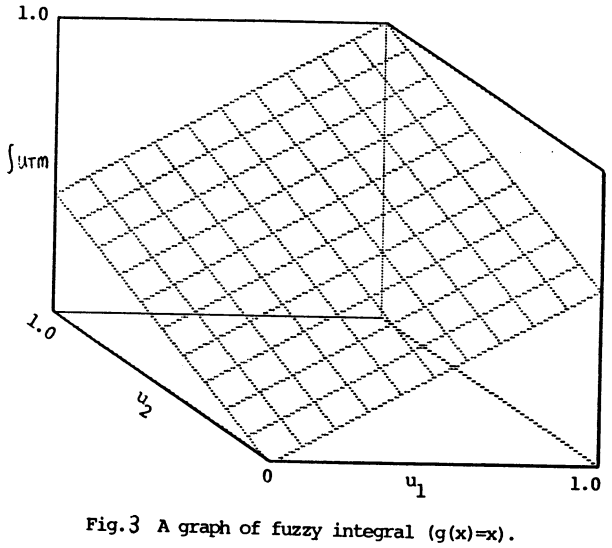


Fig.3 A graph of fuzzy integral ($g(x)=x$).

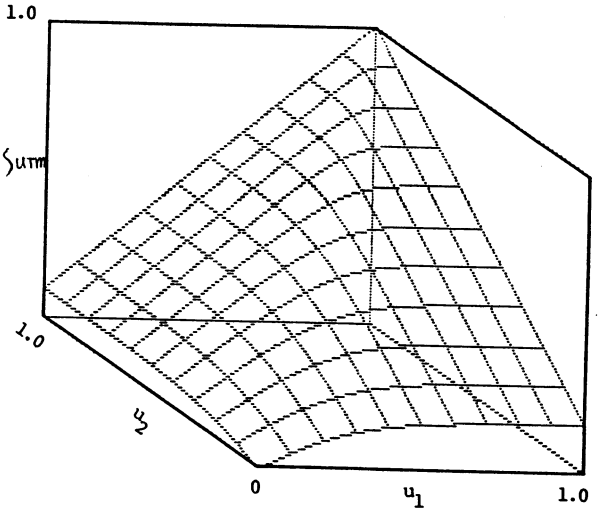


Fig.4 A graph of fuzzy integral ($g(x)=1-(1-x)^5$).

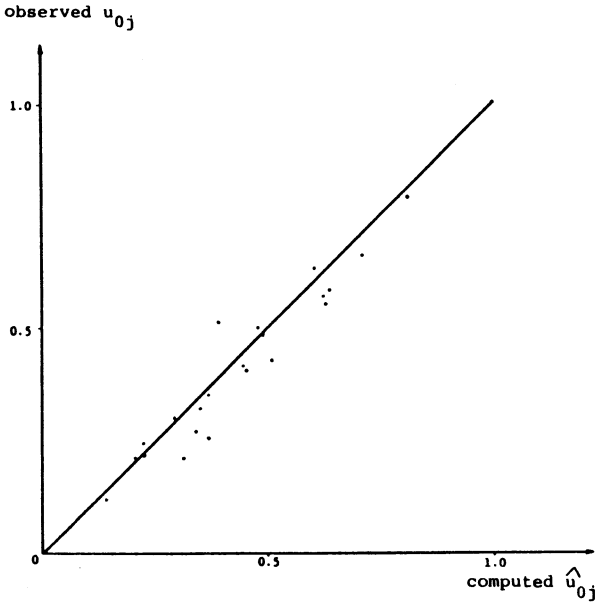


Fig.5 Observed versus computed grades of evaluation by the fuzzy additive weighting method.

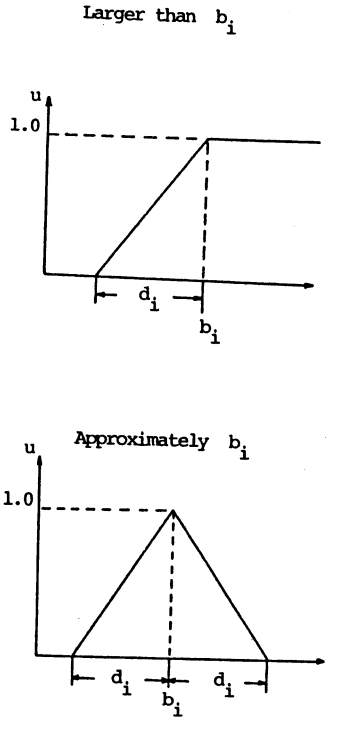


Fig. 6 Fuzzy sets of goals with a linear membership function.

Table1. The membership scales for 'good solidity', 'good dovetailing' and 'ideal tite'

j	u_{1j}	u_{2j}	u_{0j}	j	u_{1j}	u_{2j}	u_{0j}
1	0.426	0.241	0.215	13	0.949	0.020	0.247
2	0.352	0.662	0.427	14	0.202	0.826	0.500
3	0.109	0.352	0.221	15	0.744	0.551	0.555
4	0.630	0.052	0.212	16	0.572	0.691	0.585
5	0.484	0.496	0.486	17	0.041	0.975	0.355
6	0.000	0.000	0.000	18	0.534	0.873	0.661
7	0.270	0.403	0.274	19	0.674	0.587	0.570
8	0.156	0.130	0.119	20	0.440	0.450	0.418
9	0.790	0.284	0.407	21	0.909	0.750	0.789
10	0.752	0.193	0.261	22	0.856	0.091	0.303
11	1.000	1.000	1.000	23	0.974	0.164	0.515
12	0.330	0.912	0.632	24	0.073	0.788	0.324

Fuzzy 積分によるHuman Error の起こりやすさの推定

東京工業大学　鬼沢　武久　　菅野　道夫

1. はじめに

プラントなどの事故には人間が関係していることが多い。しかし、人間がとる行動は、環境や適応性などのために一意的には決まらず複雑である。そのため、人間の信頼性を過誤率で表しても大きなあいまいさが伴う。人間の信頼性はあいまいであるとの認識のもとに、Fuzzy モデルで表現しようという試みがなされている。[1)2)3)]

人間の信頼性に影響を与える因子(Performance Shaping Factor,以下PSF と略す)は多種ある。人間の信頼性解析に当っては、その作業に影響の強いPSF を理解する必要がある。しかし、PSF のおのおのに対し重みづけをすること、PSF のすべてについての相対的効果に関する方程式を展開することは困難である。[4)] その一因としては、PSF が多種あることの他に、各PSF はお互いに独立でなく影響しあっていること、信頼性への影響が極度に非線形であることなどが考えられる。

本稿では、人間の信頼性を表現するのに過誤率に代え、「過誤の起こりやすさ」のFuzzy 集合を用いる。さらに人間の信頼性に影響を与えるPSF のモデリングをFuzzy 測度、Fuzzy 積分を用いて行う。このモデルによって、人間の信頼性にとって重要なPSF の選択、過誤の起こりやすさの推定をする。最後に、マイコンによる実験を通して本モデルの有効性を確認する。なお、Fuzzy 測度、Fuzzy 積分については文献5)などを参照されたい。

2. 過誤の起こりやすさの表現

2.1 過誤の起こりやすさのFuzzy 集合

「過誤の起こりやすさ」のFuzzy 集合を

$$\mu_{\tilde{Er}}(e) = \frac{1}{1+20\,|\,e-e_0\,|^{m}} \tag{1}$$

で表す。e_0、mは過誤率をもとにして求められるパラメータである。なお過誤率は、$[P_L, P_M, P_U]$の三項組で与えられており、P_Mは過誤率の最良の推定値、P_Uはその上限値、P_Lはその下限値である。

i) e_0の求めかた

P_Mをもとにして次式で求める。

$$e_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(K\cdot\log(1/P_M))^3} & , \quad P_M \neq 0 \\ 0 & , \quad P_M = 0 \end{cases} \tag{2}$$

ただし、Kは定数である。

通常のルーチン的な作業の過誤率は10^{-2}～10^{-3}であること[4)]、5×10^{-5}を過誤率の最小の下限値としていること[4)]から、一段には、$K=1/\log(1/5\times10^{-3})$とする。過誤率と過誤の起こりやすさの対応を表1 に示す。

ii) mの決めかた

i) $k=P_U/P_M, P_M/P_L$とする。$k\leq3, 3<k\leq5, 5<k\leq10, 10<k$ の4 つの範囲に分ける。

ii) 表1のクラスEにおけるmの値をkの範囲によって、2.0,2.5,3.0,3.5 とする。

表　1　過誤の起こりやすさと過誤率との対応

クラス	過誤の起こりやすさ	過誤率
A	1.0	1.0
B	0.9 ～ 1.0 (0.95)	7.830×10^{-2} ～ 1.0
C	0.7 ～ 0.9 (0.8)	1.841×10^{-2} ～ 7.830×10^{-2}
D	0.5 ～ 0.7 (0.6)	5.0×10^{-3} ～ 1.841×10^{-2}
E	0.3 ～ 0.5 (0.4)	8.872×10^{-4} ～ 5.0×10^{-3}
F	0.2 ～ 0.3 (0.25)	2.225×10^{-4} ～ 8.872×10^{-4}
G	0.1 ～ 0.2 (0.15)	1.636×10^{-5} ～ 2.225×10^{-4}
H	0.05 ～ 0.1 (0.075)	7.243×10^{-7} ～ 1.636×10^{-5}
I	0.0 ～ 0.05 (0.025)	0.0 ～ 7.243×10^{-7}
J	0.0	0.0

( )はクラスの代表値である

表　2　パラメータmの値

クラス	m			
	$k \leqq 3$	$3 < k \leqq 5$	$5 < k \leqq 10$	$10 < k$
B	2.7	3.5	4.0	4.7
C	3.1	3.8	4.6	6.4
D	2.3	2.85	3.4	4.0
E	2.0	2.5	3.0	3.5
F	1.55	1.9	2.3	2.7
G	1.15	1.4	1.7	2.0
H	0.85	1.05	1.26	1.5
I	0.58	0.72	0.93	1.0

表　3　過誤の起こりやすさの差

＋側のグレード	－側のグレード	差の表現
1 ～ 0.9	1 ～ 0.95	差が無い
0.9 ～ 0.7	0.95 ～ 0.85	やや差がある
0.7 ～ 0.5	0.85 ～ 0.7	差がある
0.5 ～	0.7 ～	頭著な差がある

iii)　これを基準にして、過誤率が1桁ずれたときの(1)式によるグレードの変化が各クラスでほぼ等しくなるようにmを決める。

その結果を表2に示す。しかし、過誤率の範囲によってkの値が異なる[4]ことから、表2のうち下線を引いた値を用いることにする。なお、$k > 10$のmは、過誤率がもっとあいまいであると判断される場合である。

2.2 過誤の起こりやすさの差

過誤率の対数の分布がしばしば正規分布となる[4]ことから、対数正規乱数を発生させた。$\bar{L} = \log \bar{P}$，$L_n = \bar{L} + n\sigma$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$として、$P_M = 10^{L_n}$を(2)式に代入したときの$e_0$に対する、各クラスのFuzzy集合のグレードをもとにして、過誤の起こりやすさの差を表3のように表現する。

3. Fuzzy測度、積分によるモデリング

3.1 Fuzzy測度の同定

A:評価対象、$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$:Aを構成する属性の集合、$h_{A_i}(x_j): X \to [0,1]$: 被験者iによるAに関する$x_j$の評価、g:Aを評価するときの属性の重要度、$e_i = \int_X h_{A_i}(x) \circ g(\cdot)$: 評価モデル、

$J = \left[\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(e_i^* - e_i)^2\right]^{1/2}$:Performance Index とする。

ただし、e_i^*は被験者iによるAの評価、e_iは被験者iのFuzzy積分による評価、Tは被験者の総数である。

h_{A_i} e_i^*がわかっているときに、Jを最小にするようにgを同定し、モデリングに必要な属性を見出すことが本章の問題である。なお、同定法は文献6)による。

3.2 モデリング

モデリングのために以下の概念を定義する。

定義: degree of overlapping

$$\mu_{kl} = \begin{cases} \dfrac{g(\{x_k, x_l\}) - (g_k + g_l)}{g_k \wedge g_l} & , \quad k \neq l \\ 0 & , \quad k = l \end{cases} \tag{3}$$

ただし、$g_k = g(\{x_k\})$。

定義: normalized μ_{kl}

$$m_{kl} = \begin{cases} \mu_{kl} & , \quad \mu_{kl} < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1 + \mu_{kl}} & , \quad \mu_{kl} \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

定義: overlapping coefficient

$$\eta_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{m_{kl}^3}{n - 1} \tag{5}$$

ただし、nは属性の数である。

定義: necessity coefficient

$$\xi_k = 1 + \eta_k (1 - g_k) \quad , -1 \leq \eta_k < 0 \tag{6}$$

$\eta_k \geq 0$ の属性 x_k は必要な属性である。逆に、$\eta_k < 0$ の属性 x_k については、重要度 g_k をも考えあわせた(6) 式で評価する。本稿では、原則として次式を満たす項目 x_k は除去することにする。ただし、$\eta_k \geq 0$ の項目は除去しない。

$$\frac{\xi_k}{\underset{k\ ,\ \eta_k < 0}{Max}\ \xi_k} < 0.7 \tag{7}$$

4. 実験および結果

4.1 実験方法

実験は以下の4つを準備し、各実験100 問ある。使用するマイコンはFM-8、11EXで、ディスプレイは14インチカラーモニタである。

i)ディスプレイに表示される3桁以下の数字を大きい順に並べ換える。

ii)2桁以下の2数の加算か減算を暗算で行い、答を入力する。問題はディスプレイに表示される。

iii)ディスプレイに表示される3桁以下の数字を3で割った余りを入力する。

iv) ディスプレイに表示される数字を含む無意味列10文

表 4 作業状況

項目	状況の詳細
機器	・普通の状況。・ディスプレイを離して斜めに置く。 ・ディスプレイの文字をみづらい色にする。 ・テンキーの代わりにアルファベットキーを使う。 ・文字の大きさを小さくする。・文字の表示位置を変える。
環境	・普通の状況。・室温が高い。・人の出入りがある。 ・ラジオをならして騒音のもとで作業をする。
時間制限	・実験i: 11〜16秒間をランダムに変化。25秒固定。 ・実験ii: 3〜5秒間をランダムに変化。10秒固定。 ・実験iii: 10 秒固定。・実験iv: 15秒固定。
被験者	・学生(男: 14人、女: 9 人) 社会人 (男: 2 人、女: 8 人)

ただし、普通の状況とは何も工作しない状況を言う。

字をそのとおりに入力する。本稿で扱う作業状況を表4 に示す。被験者は、いろいろ組あわせた状況のもとでなるべく正解するように指示され、さらに実験後、アンケートに口頭で答えることになっている。なお、アンケート項目は、作業内容を考え、文献4)を参考にして選択されたものである。

4.2 解析結果

得られたデータ数は、実験i)・・・75、 実験ii)・・・34、実験iii)・・・23、 実験iv)・・・13、 の計145 個である。$L=\sum_{i=1}^{N}\log P_i/N$,N;データ数、$\sigma=(\sum_{i=1}^{N}(L-\log P_i)^2/N)^{1/2}$、$P=10^{-L}$ として、

○普通の状況のもとでの実験・・・・80例; $P=4.335\times10^{-2}$, $\sigma=0.328$

○異常の状況のもとでの実験・・・・65例; $P=8.356\times10^{-2}$, $\sigma=0.429$

であった。なお、普通の状況とは何にも工作しない状況で、作業時間は表4 の固定した時間である。以上の結果から(2) 式のパラメータ K を

$$K=\frac{1}{\log 20} \tag{8}$$

とする。また、アンケート結果は、0→0、1→0.167、2→0.333、3→0.5、4→0.667、5→0.833、1→1 と規格化する。

145 データのうち、任意に選んだ90データを使ってFuzzy 測度を同定した。以下に示す表中の番号はアンケート番号に対応する。

表 5 各PSFsの細部項目に対する結果

	機器の操作性		環 境			疲 労 度		
細部項目	1	2	4	5	7	11	12	13
g	0.753	0.822	0.432	0.432	0.137	0.405	0.074	0.784
η	-0.446	-0.446	-0.383	-0.360	+0.257	+0.262	+0.423	+0.121
ξ	0.890	0.921	0.782	0.796	-	-	-	-
J	0.201		0.179			0.273		

(1) 細部項目からPSF へ

被験者 i の細部項目 j のアンケート結果を $h_{X_i}(x_j)$、PSF X のアンケート結果を $e^*_{X_i}$ として、Fuzzy 測度 g_X を同定した。PSFs I,II,IVの細部項目に対する最終結果を表 5に示す。I では細部項目 3 (慎重に操作したかどうか) 、IIでは 6 (人の出入り) が除かれている。

III については8 (作業の慣れ) 、10 (作業の難度) が除かれ、9 (作業の得意、不得意) のみが残ったので表示してない。IVについてはすべての項目のηが正であることから除かれてない。

表 6 PSF の結果

PSF	I	II	III	IV	V
g	0.373	0.316	0.106	0.328	0.328
η	-0.031	-0.151	+0.031	-0.288	-0.350
ξ	0.981	0.897	-	0.807	0.765
J	0.218				

(2) 各PSF から過誤の起こりやすさへ

(1) で同定した g_X を使い、Fuzzy 積分によって推定した被験者 i のPSF X の評価を $h_i(X)$ (Vについてはアンケート結果を使用) 、被験者 i の過誤率から求めた過誤の起こりやすさを e^*_i として、Fuzzy 測度 g を同定した。その結果を表 6に示す。適性は他の4 つと比べると小さいが、$\eta>0$ と必要な項目となっている。

残りの55データについて、(2) で同定した g とPSF に関するアンケート結果を用いて、Fuzzy 積分により過誤の起こりやすさを推定し、データ値と比較した。その結果、J=0.222 で表 6の J とほぼ等しい。

4.3 過誤の起こりやすさのFuzzy 集合

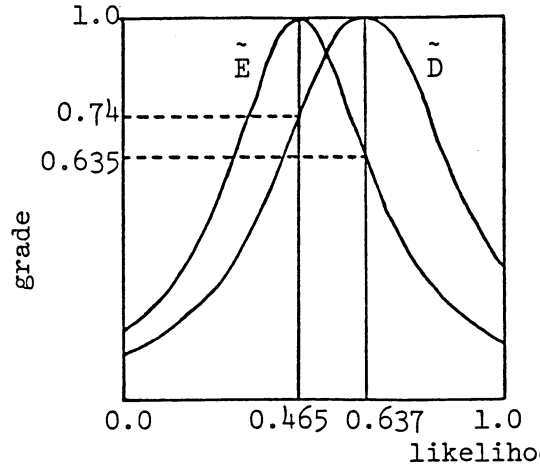


図 1 実験での作業の過誤の起りやすさのFuzzy 集合

普通の状況での平均過誤率は4.335×10^{-2}であった。過誤の起こりやすさは0.465 で表1 のクラスEに入る。過誤の起こりやすさの Fuzzy 集合を描くと図1のẼである。異常な状況での平均過誤率は8.356×10^{-2}であった。過誤の起こりやすさは 0.637、クラスDに入る。過誤の起こりやすさのFuzzy 集合は図1のD̃である。

0.637 に対するẼのグレードは0.635 、0.465 に対するD̃のグレードは0.74である。表3 からわかるように、D̃とẼでは過誤の起こりやすさに差があり、D̃の方が大きいと判断できる。過誤の起こりやすさをẼ程度にするには、D̃の方の作業状況を改善する必要がある。

5. おわりに

本稿では、人間の信頼性はあいまいであるとの認識のもとに、過誤率の代わりに、「過誤の起こりやすさ」のFuzzy 集合で表現することを提案した。さらに、人間の信頼性に影響を与えるPSF のモデリングをFuzzy 測度、Fuzzy 積分を用いて行い、マイコンによる実験を通してその有効性を確めた。その結果、提案したモデルによって、必要と思われる要因を選択でき、さらに、過誤の起こりやすさが推定できた。また、普通の作業状況での過誤の起こりやすさのFuzzy 集合を基準にして、推定された過誤の起こりやすさに対するグレードから、作業状況の改善指針が得られることがわかった。

参考文献

1) T. Terano, Y. Murayama and N. Akiyama: Human Reliability and Man-Machine Systems, Automatica, 19(6), 719 - 722, 1983

2) 野間、田中、浅居: ファジィ確率を用いる欠陥関連樹木法について，人間工学，17(6)，291～297，1981

3) 鬼沢、菅野: あいまい論理を用いた故障解析，計測自動制御学会論文集，20(6)，498～505，1984

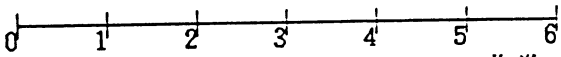
4) A. D. Swain and H. E. Guttman: Handbook of Human Reliability with Emphasis on Nuclear Power Plant Applications, NUREG/CR-1278, (2nd draft) October, 1980

5) M. Sugeno: Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, Dr Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974

6) K. Ishii and M. Sugeno: A Model of Human Evaluation Process Using Fuzzy Measures, Int. J. Man-Machine Studies, (to appear)

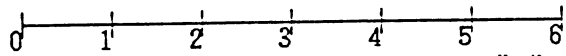
付録　アンケート項目

I．機器の操作性
1 使用したキーボードは操作しやすいものでしたか。
2 使用したディスプレイは見やすかったですか。
3 操作は慎重にしましたか。
使用した機器の操作性を総合的に評価してください。



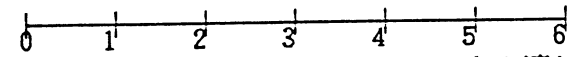
非常に良い　　非常に悪い

II．作業場の環境
4 室温は快適でしたか。
5 音はうるさかったですか。
6 人の出入りは気になりましたか。
7 環境という面で作業に集中できましたか。
作業場の環境状況を総合的に評価してください。



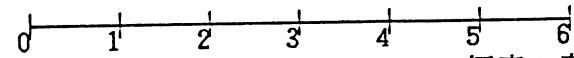
非常に良い　　非常に悪い

III．被験者の適性
8 この作業にどれだけ慣れていると思いますか。
9 この作業は得意ですか、不得意ですか。
10 この作業の難度はどの程度でしたか。
この作業に対するあなたの適性を評価してください。



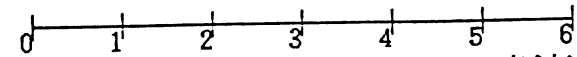
非常に適している　　全く適していない

IV．疲労度
11 作業時間の長さはどうでしたか。
12 作業時の姿勢はどうでしたか。
13 作業開始前の疲労度はどの程度でしたか。
作業時の疲労度を総合的に評価してください。



疲労感全く無い　　極度の疲労感あり

V．作業に取り組む気持ち
この作業に取り組む気持ちはどの程度でしたか。



全問正解くらいに真剣にやった　　全く真剣さに欠けた

最後に、作業に影響を与える度合いの大きいと思える順番に、
I～Vを並べ換えてください。

多属性ファジィ選好関係に関する一考察

中村和男

製品科学研究所

1．はじめに

多属性代替案についての決定プロセスでは，属性毎の代替案間での選好関係に基づいて，明らかに好ましくない代替案を除外し，選択候補の集合を絞り込むことがしばしば有効な手段となる．

ここでは，多属性代替案間での属性別選好関係がファジィ関係として与えられた場合に，全属性にわたりこれらを統合して，総合的に好ましくないと見られる代替案を排除するための数タイプの統合ファジィ選好関係を構成する．さらに，決定プロセスの一ステップとしての位置づけの中でそれら統合選好関係の諸特性を属性別選好関係の特性条件との関連で検討する．

2．多属性ファジィ選好関係の導入

（1） ファジィ関係に関する諸定義

ファジィ選好関係の特性を検討していく上で，必要となる諸記号および諸概念を定義する．

【定義1】(a)（2項）ファジィ関係 $R:X\times X$ 上のファジィ集合で，メンバーシップ関数(M.F.)

$$r:X\times X\rightarrow[0,1]$$

により特性づけられる．

(b)否定ファジー関係 $\overline{R}:R$ の$X\times X$ における補集合で，

$$\overline{r}(x,y)=1-r(x,y)$$

で特性づけられる．

(c)逆ファジィ関係 $R^{-1}:X\times X$ 上のファジィ集合で，

$$r^{-1}(x,y)=r(y,x)$$

で特性づけられる．

【定義2】$R,R'\subset X\times X$ をファジィ関係とする．

(a)ファジィ関係の限界和 $R\oplus R':X\times X$ 上のファジィ関係で

$$r\oplus r'(x,y)=[r(x,y)+r'(x,y)]\wedge 1$$

で特性づけられる．

(b)ファジィ関係の限界差 $R\ominus R':X\times X$ 上のファジィ関係で

$$r\ominus r'(x,y)=[r(x,y)-r'(x,y)]\vee 0$$

で特性づけられる．

ここに $\wedge$ はmin，$\vee$ はmax を表わす．

【性質1】$R,R'\subset X\times X$ に対して，

(a)$\overline{R\oplus R'}=\overline{R}'\ominus\overline{R}$，(b)$\overline{R\ominus R'}=\overline{R}\oplus R'$，

(c)$R\oplus R'\supset R\cup R'$，(d)$R\ominus R'\subset R\cap\overline{R}'$．

【定義3】$R\subset X\times X$ とし以下の特性を定義する．

(a) M－反射性： $\forall x\in X, r(x,x)\geqq 0.5$，

(b) M－非反射性： $\forall x\in X, r(x,x)\leqq 0.5$，

(c) M－比較可能性： $\overline{R}^{-1}\subset R$，すなわち

$\forall(x,y)\in X\times X$，$r(x,y)+r(y,x)\geqq 1$，

(d) M－非対称性： $R\subset\overline{R}^{-1}$，すなわち

$\forall(x,y)\in X\times X$，$r(x,y)+r(y,x)\leqq 1$，

(e) M－推移性：

$\forall x,y,z\in X$，$r(x,y)\wedge r(y,z)\geqq 0.5$ のとき

$r(x,z)\geqq r(x,y)\wedge r(y,z)$，

(f) max.min-推移性：

$\forall x,y,z\in X$，$r(x,z)\geqq r(x,y)\wedge r(y,z)$．

【定義4】$R\subset X\times X$ について，

(a) M－弱順序関係： M－比較可能かつM－推移的．

(b) max.min －弱順序関係： M－比較可能かつmax.mi

n －推移的.

【定義５】$R \subset X \times X$ について,

(a) M－半順序関係： M－反射的かつM－推移的,

(b) max.min －半順序関係： M－反射的かつmax.min －推移的,

【定義６】$R \subset X \times X$ について，相反関係：[1)2)] M－比較可能かつM－非対称.

【ノート１】$R \subset X \times X$ が相反関係にあるとき $\overline{R}^{-1}=R$ すなわち $\forall (x,y) \in X \times X,\ r(x,y)+r(y,x)=1$.

（２）選好関係に関する基本概念

＊$X \times X$ 上の選好関係Ｒ： そのM.F.値r(x,y)が"x がyに対して選好されるといえることへの確信度"を表すようなファジィ関係.

＊$X \times X$ 上の優越関係Ｓ：そのM.F.値S(x,y)が"xがyに対して厳密に選好されるといえることへの確信度"を表すようなファジィ関係.

＊優越選好関係Ｓの選好関係Ｒによる構成法.

このような概念のもとにＳのＲによる生成表現として次の${}_{\alpha}S$ と${}_{b}S$ の２タイプを考える.

〔タイプａ〕："ｘはｙに対して選好され、かつｙはｘに対して選好されない"

$${}_{\alpha}S=R \cap \overline{R}^{-1}$$

〔タイプｂ〕："ｘのｙに対する選好が，ｙのｘに対する選好より強い"[3)]

$${}_{b}S=R \ominus R^{-1}$$

＊多属性代替案間の属性別選好関係を

$R_i \subset X \times X,\ \forall i \in I\ (n=|I|)$ とした時，それらのM－比較可能性，M－非対称性，M－推移性（およびmax.min-推移性）の組合せの充足性をどのレベルで考えるかが前提条件となる．すなわち，M－弱順序関係，max.min-弱順序関係，相反関係などがR_i の前提条件とされる.

＊多属性統合選好関係を$R \subset X \times X$ とすると，それは

$$R=F_n(R_1,R_2,\cdots,R_n)$$

なる$R_1 \sim R_n$ の属性別選好関係を統合する関数F_n によって規定されるものとする.

＊ミニマル多属性選好関係 $T \subset X \times X$ ：

"$\forall i, xR_i y$" すなわち

$$T=\bigcap_i R_i$$

＊多属性支配関係 $D \subset X \times X$ ：

〔タイプＡ〕"（ｘＴｙ）かつ（not ｙＴｘ）"

$$D_A=T \cap \overline{T}^{-1}=(\bigcap_i R_i) \cap (\bigcup_i \overline{R}_i^{-1})$$

〔タイプＢ〕"（ｘＴｙ）かつ（$\exists\ i, xS_i y$）".S_i について前述のタイプａ，ｂを考え,

$${}_{\alpha}D_B=T \cap (\bigcup_i {}_{\alpha}S_i)=(\bigcap_i R_i) \cap [\bigcup_i (R_i \cap \overline{R}_i^{-1})]$$

$${}_{b}D_B=T \cap (\bigcup_i {}_{b}S_i)=(\bigcap_i R_i) \cap [\bigcup_i (R_i \ominus R_i^{-1})]$$

（３）非劣選好関係

非劣選好関係 $P \subset X \times X$ は，一般的には次の表現が可能である.

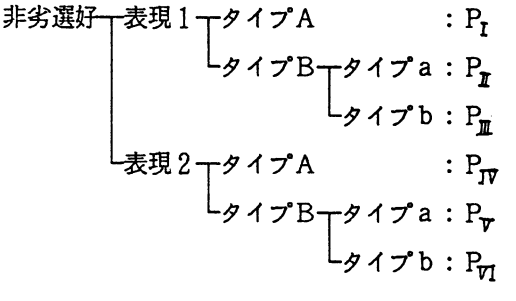
〔表現１〕 "not ｙＤｘ"

〔表現２〕

〔タイプＡ〕"（ｘＴｙ）あるいは（not ｙＴｘ）"

〔タイプＢ〕"（ｘＴｙ）あるいは（$\exists i, xS_i y$）"

ここで多属性支配関係Ｄ，優越関係S_i に前節の各タイプを適用すると，次のような ６つのタイプのＰを考えることができる.



【定義７】６つのタイプの非劣選好関係を次のように定義する.

$$P_{\mathrm{I}}={}_{A}\overline{D}^{-1}=\overline{T}^{-1} \cup T=(\bigcup_i \overline{R}_i^{-1}) \cup (\bigcap_i R_i)$$

$$P_{\mathrm{II}}={}_{\alpha}\overline{D}^{-1}_{B}=\overline{T}^{-1} \cup (\bigcap_i {}_{\alpha}\overline{S}_i^{-1})$$

$$=(\bigcup_i \overline{R}_i^{-1}) \cup [\bigcap_i (\overline{R}_i^{-1} \cup R_i)]$$

$$P_{\mathrm{III}}={}_{b}\overline{D}^{-1}_{B}=\overline{T}^{-1} \cup (\bigcap_i {}_{b}\overline{S}_i^{-1})$$

$$=(\bigcup_i \overline{R}_i^{-1}) \cup [\bigcap_i (\overline{R_i^{-1} \ominus R_i})]$$

$$P_{\mathrm{IV}}=T \cup (\overline{T}^{-1})=(\bigcap_i R_i) \cup (\bigcup_i \overline{R}_i^{-1})$$

$$P_{\mathrm{V}}=T \cup (\bigcup_i {}_{\alpha}S_i)=(\bigcap_i R_i) \cup [\bigcup_i (R_i \cap \overline{R}_i^{-1})]$$

$$P_{\mathrm{VI}}=T \cup (\bigcup_i {}_{b}S_i)=(\bigcap_i R_i) \cup [\bigcup_i (R_i \ominus R_i^{-1})]$$

【ノート２】$P_{\mathrm{I}}=P_{\mathrm{IV}}$ であるので以下では

P_{I} ,P_{II} ,P_{III} ,P_{V} ,P_{VI} の5タイプの非劣選好関係を検討する.

【性質2】 $\forall i \in I, R_i$ が相反的であれば,

(a)$P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{V}} = \bigcup_i R_i$ すなわち

$p_{\mathrm{I}}(x,y) = \cdots = p_{\mathrm{V}}(x,y) = \bigvee_i r_i(x,y)$.

(b)$P_{\mathrm{III}} = (\bigcup_i R_i) \cup [\bigcap_i (R_i \oplus R_i)]$ すなわち

$p_{\mathrm{III}}(x,y) = [\bigvee_i r_i(x,y)] \vee [\bigwedge_i (2r_i(x,y) \wedge 1)]$.

(c)$P_{\mathrm{VI}} = (\bigcap_i R_i) \cup [\bigcup_i (R_i \ominus \overline{R}_i)]$) すなわち

$p_{\mathrm{VI}}(x,y) = [\bigwedge_i r_i(x,y)] \vee [\bigvee_i (2r_i(x,y) - 1)] \vee 0$.

(証明) $R_i = \overline{R}_i^{!}$ を用いると直ちに導かれる. ■

したがって, $\{R_i \mid i \in I\}$ がすべて相反的であれば, 3つのタイプに集約される.

3. 多属性ファジィ選好関係の特性の検討

前節で導入した非劣選好関係の各タイプ間の関連を述べるとともに, 意志決定プロセスの1ステップとして多属性代替案の選択候補を絞り込むのに用いられる選好関係として具備すべき諸特性をそれら導入選好関係について検討する.

(1) $P_{\mathrm{I}} \sim P_{\mathrm{VI}}$ の間の関連について

【性質3】 任意の $\{R_i \mid i \in I\}$ に対して,

$P_{\mathrm{III}} \supset P_{\mathrm{II}} \supset P_{\mathrm{I}} \supset P_{\mathrm{V}} \supset P_{\mathrm{VI}}$ が成立する.

(証明)

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{III}} &= (\bigcup_i \overline{R}_i^{!}) \cup [\bigcap_i (\overline{R}_i^{!} \ominus R_i)] \\
&= (\bigcup_i \overline{R}_i^{!}) \cup [\bigcap_i (\overline{R}_i^{!} \oplus R_i)] \quad \text{(性質1-b)} \\
&\supset (\bigcup_i \overline{R}_i^{!}) \cup [\bigcap_i (\overline{R}_i^{!} \cup R_i)] \quad \text{(性質1-c)} \\
&= P_{\mathrm{II}} \\
&\supset (\bigcup_i \overline{R}_i^{!})] \cup (\bigcap_i R_i) \\
&= P_{\mathrm{I}} \\
&\supset [\bigcup_i (R_i \cap \overline{R}_i^{!})] \cup (\bigcap_i R_i) \\
&= P_{\mathrm{V}} \\
&\supset [\bigcup_i (R_i \ominus R_i^{-1})] \cup (\bigcap_i R_i) \quad \text{(性質1-d)} \\
&= P_{\mathrm{VI}} \quad ■
\end{aligned}
$$

【ノート3】 上記の$P_{\mathrm{I}} \sim P_{\mathrm{VI}}$の包含関係を総合すると図1のような関連構造が得られる.

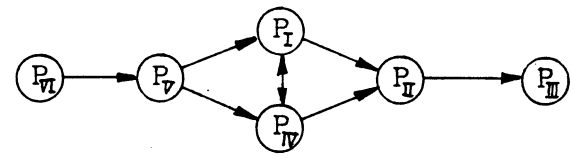


図 1 各種非劣ファジィ選好関係間の包含関係

【性質4】 $\forall i, R_i \subset X \times X$ が相反性を満たしていると, $P_{\mathrm{III}} \supset P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{V}} \supset P_{\mathrm{VI}}$ が成立する.

(2) 比較可能性について

【性質5】任意の $\{R_i \mid i \in I\}$ に対して, P_{I} , P_{II} , P_{III} はM−比較可能である.

(証明)

$\overline{P}_{\mathrm{I}}^{-1} = (\bigcup_i R_i) \cap (\bigcup_i \overline{R}_i^{!}) \subset (\bigcap_i R_i) \cup (\bigcup_i \overline{R}_i^{!}) = P_{\mathrm{I}}$

が成立しP_{I} はM−比較可能である. 次に, 性質3を用いると

$P_{\mathrm{I}} \subset P_{\mathrm{II}} \subset P_{\mathrm{III}}$

であり, また逆関係についても

$P_{\mathrm{I}}^{-1} \subset P_{\mathrm{II}}^{-1} \subset P_{\mathrm{III}}^{-1}$

である. したがって

$\overline{P}_{\mathrm{III}}^{-1} \subset \overline{P}_{\mathrm{II}}^{-1} \subset \overline{P}_{\mathrm{I}}^{-1}$

となり, P_{I} のM−比較可能性を用いると

$\overline{P}_{\mathrm{III}}^{-1} \subset \overline{P}_{\mathrm{II}}^{-1} \subset \overline{P}_{\mathrm{I}}^{-1} \subset P_{\mathrm{I}} \subset P_{\mathrm{II}} \subset P_{\mathrm{III}}$

で, P_{II} , P_{III} のM−比較可能性が示される. ■

【性質6】 $\forall i, R_i \subset X \times X$ がM−比較可能であるとすると, P_{V} はM−比較可能である.

(証明) R_i のM−比較可能性から $\forall i, \overline{R}_i^{!} \subset R_i$ なることを用いると

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_{\mathrm{V}}^{-1} &= (\bigcup_i \overline{R}_i^{!}) \cap [\bigcap_i (\overline{R}_i^{!} \cup R_i)] \\
&\subset (\bigcup_i \overline{R}_i^{!}) \cap (\bigcap_i R_i) \\
&= [\bigcup_i (R_i \cap \overline{R}_i^{!})] \cap (\bigcap_i R_i) \\
&\subset [\bigcup_i (R_i \cap \overline{R}_i^{!})] \cup (\bigcap_i R_i) = P_{\mathrm{V}} \quad ■
\end{aligned}
$$

【ノート4】性質6より $\forall i \in I, R_i$ が相反的であれば, P_{V} はM−比較可能となる.

【ノート5】 P_{VI} については, $\forall i \in I, R_i$ が相反性を満たしていても, 必ずしもM−比較可能であるとは限

らない．例えば，

$r_1(x,y)=0.6, r_1(y,x)=0.4$，

$r_2(x,y)=0.4, r_2(y,x)=0.6$

としてみると，

$p_{VI}(x,y)=[\bigwedge_i r_i(x,y)]\vee[\bigvee_i(2r_i(x,y)-1)]\vee 0$

$= 0.4 \vee 0.2 = 0.4$

同様に $p_{VI}(y,x)= 0.4$ となり，M－比較可能ではない．

（3）非対称性について

非劣選好関係では一般に成立しないが，その逆・否定関係にある支配関係については非対称であることが望ましい．

【性質7】$R\subset X\times X$ がM－比較可能であれば，$\overline{R}^{-1}\subset X\times X$ はM－非対称である．

【ノート6】 $P_I \sim P_{VI}$ に対して，その逆・否定関係としての支配関係について検討すると，性質5，6，7から以下のようになる．任意の $\{R_i \mid i\in I\}$ について

$D_I=\overline{P_I}^{-1}=(\bigcap_i R_i)\cap(\bigcup_i \overline{R}_i^{-1})=D_A$

$D_{II}=\overline{P_{II}}^{-1}=(\bigcap_i R_i)\cap[\bigcup_i (R_i\cap\overline{R}_i^{-1})]={}_aD_B$

$D_{III}=\overline{P_{III}}^{-1}=(\bigcap_i R_i)\cap[\bigcup_i (R_i\ominus\overline{R}_i^{-1})]={}_bD_B$

はM－非対称である．また，$\forall i, R_i$ がM－比較可能であれば，

$D_V=\overline{P_V}^{-1}=(\bigcup_i \overline{R}_i^{-1})\cap[\bigcap_i (\overline{R}_i^{-1}\cup R_i)]$

は，M－非対称となる．なお，$\forall i, R_i$ が相反的であっても，

$D_{VI}=\overline{P_{VI}}^{-1}=(\bigcup_i \overline{R}_i^{-1})\cap[\bigcap_i (\overline{\overline{R}_i^{-1}\ominus R_i})]$

はM－非対称であるとは限らない．

（4）推移性について

一般には非劣選好関係に対して推移性は要請されないが，その逆・否定関係である多属性支配関係Dが，形式的に $D=(\bigcap_i Q_i)\cap(\bigcup_i Q_i^*)$ と表された時 $(\bigcap_i Q_i)$ および Q_i^* が厳密な選好を意味する時その Q_i^* について推移性が要請される．以下では $D_I \sim D_{VI}$ に現われる

$(\bigcap_i R_i)$, $(R_i\cap\overline{R}_i^{-1})$, $(R_i\ominus R_i^{-1})$,

$(\overline{R}_i^{-1}\cup R_i)$, $(\overline{\overline{R}_i^{-1}\ominus R_i})$

について推移性を検討する．

【性質8】

(a) $\forall i, R_i$ がM－推移的であれば，$\bigcap_i R_i$ はM－推移的である．

(b) $\forall i, R_i$ がmax･min-推移的であれば，$\bigcap_i R_i$ はmax･min-推移的となる．

（証明）(a) ある $x,y,z\in X$ に対し $[\bigwedge_i r_i(x,y)]\wedge[\bigwedge_i r_i(y,z)]\geqq 0.5$ が成立しているものとする．これは $r_i(x,y)\geqq 0.5$ かつ $r_i(y,x)\geqq 0.5$，$\forall i\in I$ を意味しており，R_i のM－推移性から，

$\forall i\in I, r_i(x,z)\geqq r_i(x,y)\wedge r_i(y,z)$ となる．

これを用いると，

$r_i(x,z)\geqq\bigwedge_i[r_i(x,y)\wedge r_i(y,z)]$

$=[\bigwedge_i r_i(x,y)]\wedge[\bigwedge_i r_i(y,z)]$.

(b) $\forall x,y,z\in X$, $\forall i\in I$,

$r_i(x,z)\geqq r_i(x,y)\wedge r_i(y,z)$ であるとすると，(a)と同様に示される．■

【ノート7】R_i がM－推移的（max.min- 推移的）であっても，必ずしも $\overline{R}_i^{-1}$ がM－推移的（max.min- 推移的）であるとは限らない．

【性質9】 $\forall i, R_i, \overline{R}_i^{-1}$ がともに，M－推移的（max.min- 推移的）であるとき，性質8により，$R_i\cap\overline{R}_i^{-1}$ もM－推移的（max.min-推移的）である．従って R_i が相反的でM－推移的（max.min-推移的）であるときは，$R_i\cap\overline{R}_i^{-1}$ もM－推移的（max.min-推移的）となる．

【ノート8】RおよびR'がM－推移的（max.min- 推移的）であってもR⊖R'は必ずしもM－推移的（max.min- 推移的）であるとは限らない．

【性質10】 $\forall i, R_i$ が相反的でM－推移的（max.min- 推移的）であれば，$R_i\ominus R_i^{-1}$ はM－推移的（max.min- 推移的）である．

〔証明〕R_i が相反的でM－推移的であるとする．相反性より，

$r_i\ominus r_i^{-1}(x,y)=[r_i(x,y)-r_i(y,x)]\vee 0$

$=[2r_i(x,y)-1]\vee 0$,

ここで

$[r_i \ominus r_i^{-1}(x,y)] \wedge [r_i \ominus r_i^{-1}(y,z)] \geqq 0.5$

とすると,

$[2r_i(x,y)-1] \wedge [2r_i(y,z)-1] \geqq 0.5$

で

$r_i(x,y) \wedge r_i(y,z) \geqq 0.75 > 0.5$

となる. R_i のM−推移性より,

$r_i(x,z) \geqq r_i(x,y) \wedge r_i(y,z)$,

$r_i \ominus r_i^{-1}(x,z) = [2r_i(x,z)-1] \vee 0$

$\geqq [2r_i(x,y) \wedge 2r_i(y,z)-1] \vee 0$

$= [(2r_i(x,y)-1) \wedge (2r_i(y,z)-1)] \vee 0$,

$= [r_i \ominus r_i^{-1}(x,y)] \wedge [r_i \ominus r_i^{-1}(y,z)]$.

max.min-推移性についても同様に示すことができる. ■

【ノート9】R_1 およびR_2 が相反的かつM−推移的 (max·min-推移的) であっても, $R_1 \cup R_2$ はM−推移的 (max·min 推移的) であるとは限らない. しかし, $(R_i \cup \overline{R}_i^{-1})$ はR_i が相反的でM−推移的 (max·min 推移的) であれば, $R_i \cup \overline{R}_i^{-1} = R_i$ となるので, M−推移的 (max·min 推移的) となる.

【性質11】$\forall i, R_i$ が相反的かつmax·min-推移的であれば, $\overline{R^{-1}_i \ominus R_i}$ はmax·min-推移的である.

(証明) R_i の相反性より,

$1-[r_i^{-1}(x,z)-r_i(x,z)] \vee 0 = 2r_i(x,z) \wedge 1$

$\geqq 2r_i(x,y) \wedge 2r_i(y,z) \wedge 1$

$= [1-(r_i^{-1}(x,y)-r_i(x,y)) \vee 0]$

$\wedge [1-(r_i^{-1}(y,z)-r_i(y,z)) \vee 0]$. ■

【ノート10】$\forall i, R_i$ が相反的かつM−推移的であっても, $\overline{R^{-1}_i \ominus R_i}$ はM−推移的とは限らない.

⑸合併的統合による下限性

いま $\{R_i \mid i \in I\}$ の合併的統合として$A_D = \bigcup_i R_i$ を定義する. するとR_i がM−非対称のとき少なくとも1属性について選好されていれば, 非劣選好の意味でも選好されていることが望まれる.

【性質12】$\forall i, R_i$ がM−非対称であるとすると, $P_I, P_{II}, P_{III} \supset A_D, P_V = A_D$である.

(証明) $P_V = [\bigcup_i (R_i \cap \overline{R}_i^{-1})] \cup (\bigcap_i R_i)$

$= (\bigcup_i R_i) \cup (\bigcap_i R_i)$ (M−非対称性)

$= (\bigcup_i R_i) = A_D$

これに性質3を用いて, $P_{III} \supset P_{II} \supset P_I \supset P_V = A_D$. ■

【ノート11】$\forall i, R_i$ が相反的であっても, $P_V \supset P_{VI}$ であるので, 一般的には$P_{VI} \supset A_D$ とは限らない.

⑹属性別選好と統合選好の正連関性

【定義8】属性別選好関係 $\{R_i \mid i \in I\}$ および $\{R'_i \mid i \in I\}$ に対してその統合選好 $P = F_n(R_1, \cdots, R_n)$, $P' = F_n(R'_1, \cdots, R'_n)$ が対応しているとする. 任意の $(x,y) \in X \times X$ について, $\forall i, r_i(x,y) \geqq r'_i(x,y)$かつ $r_i(y,x) \leqq r'_i(y,x)$ ならば, $p(x,y) \geqq p'(x,y)$ が成立するとき, 統合関係R_n は正連関性を満たしているといい, $\{R_i\}$ に対しPは正連関的であるという.

【性質13】任意の $\{R_i\}$ について$P_I \sim P_{VI}$ は正連関的である.

(証明) $r_i(y,x) \leqq r'_i(y,x)$ ならば, $\overline{r}_i^{-1}(x,y) \geqq \overline{r}'^{-1}_i(x,y)$ なる性質を用いると容易に示せる.

【ノート12】R_i が相反的な場合には, $r_i(x,y) \geqq r'_i(x,y)$ は$r_i(y,x) \leqq r'_i(y,x)$ を意味するので, $\forall i, r_i(x,y) \geqq r'_i(x,y)$なる条件のとき, $p_I(x,y) \geqq p'_I(x,y)$, ・・・, $p_{VI}(x,y) \geqq p'_{VI}(x,y)$ となる.

⑺被選好属性の付加による統合選好の非強化性

【定義9】属性別選好関係 $\{R_i \mid i \in I\}$ とその統合選好$P = F_n(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ があったとき, 任意の $(x,y) \in X \times X$ について, $r_j(y,x) \geqq \bigwedge_{i \in I} r_i(y,x)$ なる新たなR_j が加わっても, $P' = F_{n+1}(R_1, \cdots, R_n, R_j)$ について $p'(x,y) \leqq p(x,y)$ であるとすれば, 統合選好関数 F_n は, 被選好属性の付加による統合選好の非強化性を満たしているといわれる.

【性質14】任意の $\{R_i\}$ についてP$_I$, P$_{II}$, P$_{III}$ は被選好属性の付加に対して非強化的である.

(証明) $r_j(y,x) \geqq \bigwedge_{i\in I} r_i(y,x)$ とすると $\overline{r}_j^{-1}(x,y) \leqq \overline{r}_i^{-1}(x,y)$ なる性質を用いて容易に示すことができる.

【ノート13】P_V, P_{VI} については, 非選好属性の付加による非強化性は必ずしも一般的には保証されない.

【性質15】$\forall i \in I \cup \{j\}$, R_i が相反的であるとすると, P_V, P_{VI} は被選好属性 j の付加に対して非強化的である.

(8)選好属性の付加による非弱体化性

【定義10】属性別選好関係 $\{R_i \mid i \in I\}$ とその統合選好 $P=F_n(R_1,\cdots,R_n)$ があったとき, 任意の $(x,y)\in X\times X$ について $r_j(x,y) \geqq \bigwedge_{i\in I} r_i(x,y)$ なる新たな R_j が加っても, $P'=F_{n+1}(R_1,\cdots,R_n,R_j)$ について $p'(x,y) \geqq p(x,y)$ ならば, 統合関数 F_n は, 選好属性の付加による非弱体化性を満たしているといわれる.

【性質16】任意の $\{R_i\}$ について P_I, P_{II}, P_V, P_{VI} は選好属性の付加に対して, 非弱体化的である.

【ノート14】P_{II}, P_{III} については, 選好属性の付加による非弱体化性は必ずしも保証されない.

【性質17】$\forall i \in I \cup \{j\}$, R_i が相反的であるとすると, P_{II}, P_{III} は選好属性 j の付加によって, 非弱体化的である.

3. おわりに

所与の属性別ファジィ選好関係を統合して, 多属性代替案上にファジィな非劣選好関係を構成する5タイプの異なる方法を提案し, それら非劣選好関係の包含関係および, 代替案の候補を絞り込むという決定プロセスからみた, 非劣選好関係としての合理的諸特性の充足性を検討した. その結果, 一般的には絞り込みは P_{III} タイプが最も緩やかで, P_{VI} タイプが最も厳しいことになる. しかし, その特性の合理性を総合すると P_{VI} タイプは比較可能性や逆・否定関係の要素の推移性などの点で不十分である. また, 属性別選好関係が特に相反的な場合には P_{II}, P_I, P_V は同等な関係となる. これら非劣選好関係Pに基づいてファジィ非劣解集合 (パレート解集合) $O_P \subset X$ を構成すると, そのメンバーシップ値 (M.F.値) は

$$\forall x, o_P(x) = \bigwedge_{y\in X-\{x\}} p(x,y)$$

によって与えることができる.

〔参考文献〕

1) k. Nakamura : 1st International Conference on Fuzzy Information Processing, Hawaii (1984).

2) T. Tanino : Fuzzy Sets and Systems, 12, 117-131 (1984).

3) S. A. Orlovski : Fuzzy Sets and Systems, 1, 155-167 (1978).

可能的線形回帰モデル

田中　英夫、　和多田淳三、　浅居喜代治
（大阪府立大学）（竜谷大学）　（大阪府立大学）

1．まえがき．

Zadeh [20]によって可能性の概念が導入されて以来、ファジィ集合を可能性分布によって説明されている。パターン空間とか可能性空間などが議論されている[9,14]。また拡張原理[10,11,19]によるファジィ数の演算[1-5,7,8] は可能性の観点から定義されている。Sanchez [12]はファジィ関係方程式の解法によってファジィ方程式の解を議論しているが、この方程式は可能的方程式とみなせる。

ここでは、可能的線形システムを定義し、可能的線形システムによる回帰モデルを議論する。このモデルを可能的線形モデルと呼びこの方法による分析を可能的線形回帰分析という。すでにファジィ線形回帰分析[6,15,16] の研究がなされているが、ここでは可能的線形システムの性質と可能的線形回帰モデルの一般化を取扱っている。ファジィ線形計画問題[17]にみられるように可能的線形システムは区間分析のモデルとして将来有用になると考えられる。

2．可能的線形モデル

通常の線形システムにおいて、係数がファジィ数で与えられ、拡張原理によって定義されるシステムを可能的線形システムという。ファジィ係数をDuboisとPrade による対称なファジィ数に限定する。

［定義１］　対称なファジィ数A_iを$(\alpha_i、c_i)_L$と表わし、そのメンバシップ関数を

$$\mu_{A_i}(a_i) = L((a_i-\alpha_i)/c_i)$$

とする。ここで、関数 L(x) は(i) L(x)=L(-x),(ii) L(0)=1,(iii) Lは$(0,+\infty)$で厳密に減少する。

定義１のファジィ数の例は $L(x)=\max(0,1-|x|^p)$, $L(x)=e^{-|x|^p}$, $L(x)=1/1+|x|^p$ などである[2]。　ただし、$p>0$.

［定理１］　ファジィ係数 $A_i=(\alpha_i,c_i)_L$ による可能的線形関数

$$Y=A_1x_1+\cdots+A_nx_n$$

は拡張原理によって次のように計算できる。

$$\mu_Y(y) \begin{cases} L\left((y - x^t\alpha)/c^t|x|\right) & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & x = 0,\ y = 0 \\ 0 & x = 0,\ y \neq 0 \end{cases}$$

ここで、$|x| = (|x_1|, \cdots, |x_n|)^t$ である。

係数が独立な正規分布$N(e_i, \sigma_i)$をもつ確率的線形方程式と比較すると、次のように形式的に書ける。

$$Y = \sum_i (\alpha_i, c_i)_L \quad x_i = (\alpha^t x, \ c^t|x|)_L \qquad \text{(可能的)}$$

$$y = \sum_i N(e_i, \sigma_i^2)\, x_i = N(e^t x, \ (\sigma^2)^t x^2) \qquad \text{(確率的)}$$

次にファジィ数の包含関係を定義しよう。DuboisとPrade [4,5] はファジィ数Bがファジィ数Aに包含される度合い$N_B(A)$を次のように定義している。

$$N_B(A) = 1 - \mu_B(\bar{A}) = \inf\left[(1 - \mu_B(x)) \vee \mu_A(x)\right]$$

ここでは、定義1による対称なファジィ数を取扱うので、次の定義を用いる。

[定義2] $B \subseteq A$の度合いを$C_B(A)$で表わし、次のように定義する。

$$C_B(A) = \max_h \{h \mid [A]_h \supset [B]_h\}$$

ただし、$[A]_h = \{x \mid \mu_A(x) \geq h\}$であり、A, Bは定義1のファジィ数である。

[定理2] (i) $C_B(A) \geq 0.5$ならば$C_B(A) \geq N_B(A)$

(ii) $C_B(A) \leq 0.5$ならば$C_B(A) \leq N_B(A)$

[定義3] ファジィ数の包含関係は度合いhを用いて次のように定義する。

$$A \underset{h}{\supseteq} B \iff C_B(A) \geq h$$

3. ファジィデータによる可能的線形回帰モデル

モデルとして、可能的線形システムを考える。与えられたデータはファジィ出力$Y_i = (y_i, e_i)_L$, ファジィ入力$x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$とする。可能的線形

回帰モデルを得るために、入出力関係は可能的線形システムとする。すなわち、

$$Y_i = A_1 x_{i1} + \cdots + A_n x_{in}$$

ただし、ファジィ係数は$A_i = (\alpha_i, c_i)_L$とする。ここでデータを可能的線形システムで説明する二つの方法について述べる。

3.1 Ｍｉｎ問題

ここでの問題は度合いｈが与えられ、

$$\bar{Y}_i = \bar{A}_1 x_{i1} + \cdots + \bar{A}_n x_{in} \underset{h}{\supset} Y_i \quad , \ i = 1, \ldots, N$$

を満足し、

$$J(c) = \Sigma c^t |x_i|$$

を最小とする$\bar{A}_i = (\underline{\alpha}_i, \underline{c}_i)_L$を求めることである。すなわち、与えられたデータ$Y_i$を度合いｈで含むものの中で最小の解を求めることである。この問題の解を$\bar{Y}^*_i$，$\bar{A}^*_i$で表わす。上述の問題は次のＬＰ問題になる。

$$\begin{aligned}
&\underset{\alpha,c}{\mathrm{Min}} \quad J(c) = \Sigma c^t |x_i| \\
&\text{subject to} \quad c \geq 0 \quad \text{and} \\
&\quad y_i \leq |L^{-1}(h)| \, c^t \, |x_i| - |L^{-1}(h)| \, e_i + x_i^t \alpha \\
&-y_i \leq |L^{-1}(h)| \, c^t \, |x_i| - |L^{-1}(h)| \, e_i - x_i^t \alpha \\
&\qquad i = 1, \ldots, N
\end{aligned}$$

［定理３］　$0 \leq h < 1$に対するＭｉｎ問題の解$\bar{A}^* = (\bar{\alpha}^*, \bar{c}^*)_L$は存在する。

［定理４］　ファジィ出力$Y_i = (y_i, e_i)$がすべて$e_i > 0$のとき$J^*(c)$はあるデータが$e_i = 0$のときの$J^*(c)$よりも大きい。

3.2 Ｍａｘ問題

Ｍｉｎ問題と逆に、

$$\underline{Y}_i = A_1 x_{i1} + \cdots + A_n x_{in} \underset{h}{\subset} Y_i \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$を

満足し、

$$J(c) = \Sigma c^t |x_i|$$

を最大にする$\underline{A}_i = (\underline{\alpha}_i, \underline{c}_i)_L$を求めることである。すなわち、与えられたデータ$Y_i$に度合いhで含まれるものの中で最大の解を求めることである。この問題の解を$\underline{Y}^*_i$，$\underline{A}^*_i$で表わす。上述の問題は次のＬＰ問題になる。

$$\underset{\alpha, c}{\mathrm{Max}} \quad J(c) = \Sigma c^t |x_i|$$
$$\text{subject to} \quad c \geq 0 \text{ and}$$
$$y_i \geq |L^{-1}(h)| c^t |x_i| - |L^{-1}(h)| e_i + x_i{}^t \alpha$$
$$-y_i \geq |L^{-1}(h)| c^t |x_i| - |L^{-1}(h)| e_i - x_i{}^t \alpha$$
$$i = 1, \ldots, N$$

一般にＭａｘ問題の解が存在するとは限らない。それゆえ、次の可能的線形システムの入出力関係が与えられたと仮定しよう。

$$Y^o_i = A^c_1 x^c_{i1} + \cdots + A^c_n x^c_{in}, \quad i = 1, \ldots, N$$

ただし、$n \leq N$とし、ｎ個の独立なベクトルx_iが存在するとする。

［定理５］　ファジィデータ（x^c_i，Y^c_i）が与えられると、Ｍｉｎ問題とＭａｘ問題を解くことによって、

$$A^c_i = \bar{A}^*_i = \underline{A}^*_i, \qquad Y^c_i = \bar{Y}^*_i = \underline{Y}^*_i$$

を得る。

次に加法的なファジィ観測$\Delta E_i = (\Delta y_i, \Delta e_i)$　が存在する場合を考える。すなわち、

$$Y_i = A^c_1 x_{i1} + \cdots + A^c_n x_{in} + \Delta E_i$$

Ｍｉｎ問題には常に解が存在するがＭａｘ問題に解が存在するための十分条件として

$$|\Delta y_i| \leq \Delta e_i \, |L^{-1}(h)|$$

を考える。

［定理６］　$|\Delta y_i| \leq \Delta e_i |L^{-1}(h)|$　を満足する入出力関係（x_i，Y_i）が与えられると、Ｍａｘ問題の解は存在する。

［定理７］　Ｍａｘ問題の解が存在すると、

$$\bar{Y}^*_i \underset{h}{\supset} Y_i \underset{h}{\supset} \underline{Y}^*_i$$

4．おわりに

ここでは、ファジィ数の出力を取扱ったので、定理7に示されているように、与えられたファジィ出力に対して上からの推定$\overline{Y}_i^*$と下からの推定$\underline{Y}_i^*$の両方が得られる。可能的線形システムはファジィ区間分析のモデルとして今後有用になるであろう。

参考文献

[1] S.M. Bass and H. Kwakernaak, Rating and ranking of multiple aspect alternatives using fuzzy sets, Automatica 13 (1977) 47-58.

[2] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications (Academic Press, New York, 1980).

[3] D. Dubois and H. Prade, Additions of interactive fuzzy numbers, IEEE Trans AC-26(4) (1981) 926-936.

[4] D. Dubois and H. Prade, Ranking fuzzy numbers in the seting of possibility theory, Information Sceinces 30 (1983) 183-224.

[5] D. Dubois, Linear programming with fuzzy data, FIP-84 at Kauai, Hawaii on July 22-26, 1984.

[6] B. Heshmaty and A. Kandel, Fuzzy linear regression and its applications to forecasting in uncertain environment, Fuzzy Sets and Systems, 15 (1985) 159-191.

[7] R. Jain, Tolerance analysis using fuzzy sets, Internet. J. Systems Sci., 7 (12) (1976) 1393-1401.

[8] M. Mizumoto and K. Tanaka, Some properties of fuzzy numbers, in : M.M. Gupta, R.K. Ragade and R.R. Yager, eds., Advances in Fuzzy Set Theory and Applications (north-Holland, Amsterdam), 1979, 153-164.

[9] S. Nahmias, Fuzzy variables, Fuzzy Sets and Systems 1(2) (1978) 97-111.

[10] C.V. Negoita and D.A. Ralescu, Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis (Beirkhauser Verlag, 1975) 12-24.

[11] H.T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy set, J. of Math. Appli. 64 (1978) 369-380.

[12] E. Sanchez, Solution of fuzzy equations with extended operations, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984) 237-248.

[13] B. Schweizer and A. Sklar, Associative functions and abstract semi-groups, Publ. Math. Debrecen 10 (1963) 69-81.

[14] M. Sugeno, Fuzzy theory IV (Lecture note), J. of SICE 22 (1983) 554-559.

[15] H. Tanaka, S. Uejima and K. Asai, Linear regression analysis with fuzzy model, IEEE Trans. SMC-12 (1982) 903-907.

[16] H. Tanaka, T. Shimomura, J. Watada and K. Asai, Fuzzy linear regression analysis of the number of staff in local government, FIP-84 at Kauai, Hawaii on July 22-26, 1984.

[17] H. Tanaka and K. Asai, Fuzzy linear programming problems with fuzzy number Fuzzy Sets and Systems, 13 (1984) 1-10.

[18] H. Tanaka and K. Asai, Fuzzy solution in fuzzy linear programming problems IEEE Trans. SMC-14 (1984) 325-328.

[19] L.A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I, Inform. Sci. 8 (1975) 199-249.

[20] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 3-28.

社会事象の因果伝播ネットワークにおける施策効果の定量的評価法とその政策決定支援システムへの応用

京都大学工学部　椹木哲夫　岩井壮介　片井修

Ⅰ．まえがき

従来よりDSS(Decision Support System)としては、OR、MSの分野において、数量的モデルに基づくアプローチが盛んに進められてきた。そこでは、既に限定された代替案集合、及びこれに対する明確な評価基準が与えられたもとで、最も合理的な代替案を一意的に選択するプロセスに重きをおいたものであり、その為のモデルのアセスメントに際しては、膨大な時間と労力を要するものであった。一方、都市問題等、近代社会の提起する諸問題は、その内容の複雑性・不確実性から、いわゆる問題複合体を形成しているが、そこでは、各代替案がどのような結果を招くかということのみならず、真に政策決定者の目標に影響を与え得る代替案集合を特定することすら困難なものとなっており、これらに対処する効率的なDSS が望まれている。我々はこれまでに、認知構造図の手法を用いて、問題領域に固有な専門家の知識を因果連鎖構造として抽出、知識ベース化し、ユーザである政策決定者の個々の視点に添って、問題対象の内容の明確化、その構造のグローバルな掌握を可能ならしめる為のシステムを構築した。[1] そこで本研究では、この知識に基づいて、決定者の目標に適合する代替案集合を特定したうえで、知識ベース内の因果連鎖構造から、各代替案の目標に対する貢献度・非貢献度の両者を抽出し、それにより、代替案のもつ実際効果に対するあいまい性を定量的に評価する為の施策効果評価尺度を考案する。この尺度を用いることにより、本DSS は、問題解決に臨む決定者の個々のstrategic な価値観を、システムとの対話により随時抽出しながら、決定者の効用に最も寄与する政策を決定し、提示することができる。本システムの処理の流れを、Fig.1 に概念的に示す。まずユーザから与えられた目標Gに対し、システムは知識ベース内の知識Kに基づいてその因果結合から代替案としての政策セット群Aを特定する。そしてユーザから抽出した許容される価値基準Vと、知識Kとから、代替案の各政策セットを評価し<A，{u_1}>、最もユーザの効用に適合するものを決定する<A，a_o>。

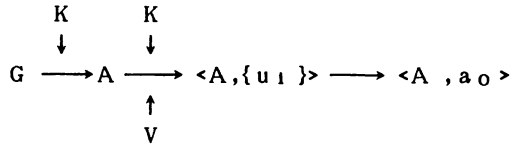


Fig.1 Conceptual flow diagram of the system

Ⅱ．因果関係知識ベース

一般に、社会問題に関する専門家の知識というものは、意見・判断、政治的信念を含む質的な情報であるが、このような知識の表現形式としては、専門家個人の認知構造に直接アクセスし、あるがままに抽出する記述的な分析手法が適していると考えられる。そこで我々は、国際政治学の分野で構造内容分析の手法として知られる認知構造図(Cognitive Map)[2]の手法を用い、原因結果の複雑に絡み合った問題の本質を、専門家の認識している因果連鎖構造として、その著わした文献より抽出した。Cognitive Map は、基本的に、コンセプト(concept) と呼ばれるノード、そしてその間の因果関係として、促進を意味する＋、抑制を意味するー、関係なしの０（通常リンクとしては抽出しない）のリンクから成る符号付有向グラフとして表わされる。又、複数の因果関係を介してのsequenceとしての関係、複数のsequenceを介する総合的な関係は、各々Fig.2 に示す乗法則＊、加法則｜に従って決定される。ところで、このような知識は、専門家個人による視野の偏りがあるばかりでなく、個人内・個人間においても現実の問題に対して、あい矛盾する認識が錯綜するものである。そこで我々は、都市問題に関して、異なる５人の専門家の著わした文献より、各々 Mapを抽出し、相互に共通する部分を介して統合・蓄積することにより、各専門分野の知識を融合した大局的な立場に立った知識ベース（コンセプト数152,因果関係数265 ）を作成、その量的に累積された知識により、総合的な見地から矛盾情報を評価して対処した。Fig.3 は、「127.公共交通補助政策」から「46. 過疎地域における公共サービスの確保」に至る知識ベースの部分的因果連鎖構造で、先に開発したシステムの出力モードのひとつ、詳細構造の階層グラフ表示モードによるものである。

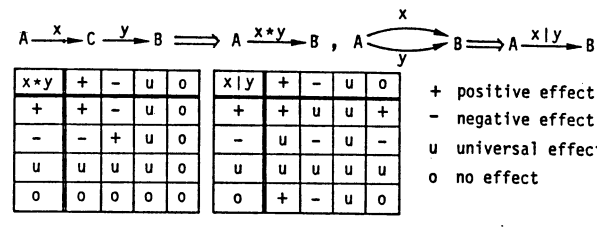


Fig.2 Multiplication and addition rules in Cognitive Maps

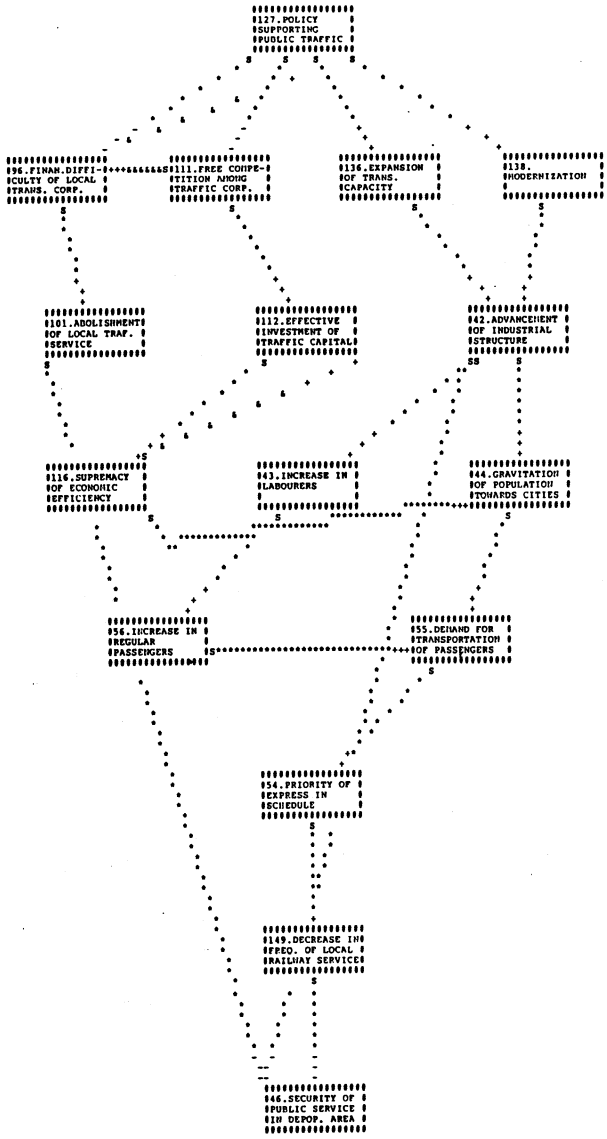


Fig.3 Causal effects of policy supporting public traffic on security of public service in depopulated area

III．因果連鎖構造に基づく施策効果評価尺度

§1 Cognitive Map における影響関係の評価

Fig.2 に示すように、Cognitive Map で評価できる任意のコンセプト間の関係は、純粋に＋・純粋に－・影響なし（0）・＋－混在した影響（u）のいずれかである。すなわち正・負両成分を２軸として考えると、Fig.4(a)に示すいずれの領域に属するかの判定に限られる。しかしながら、Fig.3 の 127 から46に至る関係からも明らかなように、このような社会問題に関する、複数専門家の意見を融合した知識においては、例えば 127→96→ 101→46、 127→ 138→42→44→55→54→ 149→46両sequenceのように、視点を変えればその影響関係が逆転したり、さらに社会システムを特徴づける負のフィードバックループを介したりすることから、コンセプト間の影響関係の多くがuとなり、政策決定者に有効な示唆を与えるとは言い難い。元来、Cognitive Map は認識構造の定性的な表現であり、個々の因果関係の強弱を言及することは困難であるが、本知識ベースが任意の２コンセプト間に存在し得る総ての因果連鎖を網羅していると考えるならば、その因果連鎖を構成する個々の定性的な関係を総合して、大局的なコンセプト間の影響を、Fig.4(b)に示すように、より細分化して柔軟に評価することが可能になる。

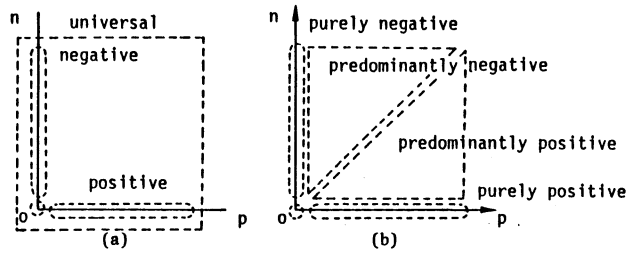


Fig.4 Evaluation of causal relationships
(a) Cognitive Maps (b) Our system

§2 因果関係知識ベースにおける影響度の定量的評価法

そこで、あるコンセプトから別の任意のコンセプトへの方向性を有する影響度を、それらの２コンセプト間に専門家がどの程度因果的な関連性を持たせて認識しているかによってとらえ、この影響度を知識ベース内の因果連鎖構造に基づいて、定量的に評価する為の尺度を考案する。この尺度の考案に際しては、以下のような３つの仮定に基づいた。

(A-1)正・負の影響が同時に存在することを許す。

(A-2)複数因果関係が直列的に連なったsequenceを介した２コンセプト間の影響度は、sequenceのlengthが長い程弱まる。

(A-3)複数sequenceが並列的に共存する２コンセプト間の影響度は、sequenceの数が多い程強まる。

これらの仮定は、正負両影響の認識がある以上、そのいずれかが生じるといった考え方はできないこと、さらに、強い因果的関連性を認識している程、遠回しな表現は避け、様々な視点から繰り返し述べる論法を反映したものである。以上の仮定に基づき、コンセプトｉからｊへの影響度m_{ij}を、正成分$\tilde{p}_{ij}$,負成分$\tilde{n}_{ij}$の２次元表示$m_{ij}=(\tilde{p}_{ij}, \tilde{n}_{ij})$により考え、以下のように定義する。

【定義１】i,j 間にlength mのsequenceのみ存在する時の影響度$m_{ij}=(\tilde{p}_{ij}, \tilde{n}_{ij})$を$\tilde{p}_{ij}\triangleq f(m)\cdot p_{ij}$、$\tilde{n}_{ij}\triangleq f(m)\cdot n_{ij}$で定義する。ここで$p_{ij}$、$n_{ij}$は各々i,j 間のlength m なるsequenceの数で、f(m)はlength mに関する単調減少関

数である。■

複数の因果関係の処理については、対照・分配・結合の３律を満足する積演算⊗、和演算⊕が、やはり３律を満足する各成分間の積×、和＋を用いて以下のように定義される。

【定義２】$m_{ij} \otimes m_{jk} \triangleq ((\tilde{p}_{ij} \times \tilde{p}_{jk}) + (\tilde{n}_{ij} \times \tilde{n}_{jk}), (\tilde{p}_{ij} \times \tilde{n}_{jk}) + (\tilde{n}_{ij} \times \tilde{p}_{jk}))$

$m_{ij} \oplus m_{jk} \triangleq (\tilde{p}_{ij} + \tilde{p}_{jk}, \tilde{n}_{ij} + \tilde{n}_{jk})$ ■

ここでは演算×、＋に対し通常の積、和を採用することにする。sequenceについては、次定理が成り立つ。

【定理１】コンセプトｋはｊを通してのみｉから影響を受ける時、i,k 間の正・負のsequenceの数p_{ik}、n_{ik}は以下のように求まる。

$$p_{ik} = p_{ij} \cdot p_{jk} + n_{ij} \cdot n_{jk}$$

$$n_{ik} = p_{ij} \cdot n_{jk} + n_{ij} \cdot p_{jk}$$ ■

定義１、２及び定理１より$f(m+l) = f(m) \cdot f(l)$ の関係が導かれ、微分可能な単調減少関数という仮定のもとで、$f(m) = z^m$ $(0 < z < 1)$の関数形が決まる（以後このｚを減衰係数と呼ぶ）。定義１をさらに一般化する。

【定義３】コンセプトi,j 間の影響度$m_{ij} = (\tilde{p}_{ij}, \tilde{n}_{ij})$は、$\tilde{p}_{ij} \triangleq \sum f(m) \cdot p^{(m)}$、$\tilde{n}_{ij} \triangleq \sum f(m) \cdot n^{(m)}$。ただし$\sum$はすべてのlengthのsequenceについての和である。■

ここで一連の以下の定理が成り立つ。

【定理２】ｎこのコンセプトが存在する時、その中の任意のコンセプトｉからｋへの影響度$m_{ik} = (\tilde{p}_{ik}, \tilde{n}_{ik})$は、次式により得られる。

$$\tilde{p}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{p}_{ij} \cdot \tilde{p}_{jk} + \tilde{n}_{ij} \cdot \tilde{n}_{jk}),$$

$$\tilde{n}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{p}_{ij} \cdot \tilde{n}_{jk} + \tilde{n}_{ij} \cdot \tilde{p}_{jk})$$ ■

【定理３】length ｍのsequenceで結ばれるコンセプトi,j 間の影響度の各成分$\tilde{p}^{(m)}$、$\tilde{n}^{(m)}$を各々その要素とする行列を$\tilde{P}^{(m)}$、$\tilde{N}^{(m)}$とする時、次式が成立する。

$$\tilde{P}^{(m)} = \tilde{P}^{(m-1)} \cdot \tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(m-1)} \cdot \tilde{N}^{(1)},$$

$$\tilde{N}^{(m)} = \tilde{P}^{(m-1)} \cdot \tilde{N}^{(1)} + \tilde{N}^{(m-1)} \cdot \tilde{P}^{(1)}$$

ただし$\tilde{P}^{(1)} = \{\tilde{p}^{(1)}_{ij}\} = \{f(1) \cdot p^{(1)}_{ij}\} = f(1) \cdot P$、$\tilde{N}^{(1)} = \{\tilde{n}^{(1)}_{ij}\} = \{f(1) \cdot n^{(1)}_{ij}\} = f(1) \cdot N$で$P = \{p_{ij}\}$$(N = \{n_{ij}\})$はコンセプトi,j 間に直接の正（負）の因果関係が存在する時１、しない時０を要素とする 0-1行列である。■

【系】$\tilde{P}^{(m)} = \{(\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)})^m + (\tilde{P}^{(1)} - \tilde{N}^{(1)})^m\}/2$

$\tilde{N}^{(m)} = \{(\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)})^m - (\tilde{P}^{(1)} - \tilde{N}^{(1)})^m\}/2$■

$\tilde{P} = \{\tilde{p}_{ij}\}, \tilde{N} = \{\tilde{n}_{ij}\}$ は各々$\tilde{P} = \tilde{P}^{(1)} + \tilde{P}^{(2)} + \cdots$、$\tilde{N} = \tilde{N}^{(1)} + \tilde{N}^{(2)} + \cdots$により表わされるが、この算出には以下の定理が有効になる。

【定理４】

$$\tilde{P} = [(\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)})\{I - (\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)})\}^{-1} + (\tilde{P}^{(1)} - \tilde{N}^{(1)})\{I - (\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)})\}^{-1}]/2 \quad \cdots(1)$$

$$\tilde{N} = [(\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)})\{I - (\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)})\}^{-1} - (\tilde{P}^{(1)} - \tilde{N}^{(1)})\{I - (\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)})\}^{-1}]/2 \quad \cdots(2)$$

ただし、Ｉは単位行列である。■

我々は、ユーザの目標に関連する知識ベース内の部分構造に対し、【定理４】の(1)(2)式を用いて影響度を算出した。なおこの$\tilde{P}$、$\tilde{N}$は、行列$\tilde{P}^{(1)} + \tilde{N}^{(1)}$、$\tilde{P}^{(1)} - \tilde{N}^{(1)}$のすべての固有値が１を超えなければ収束する。従って行列Ｐ＋Ｎ、Ｐ－Ｎの最大固有値λ_{max}に対し、$0 < z < 1/\lambda_{max}$ の範囲で減衰係数ｚを設定する。

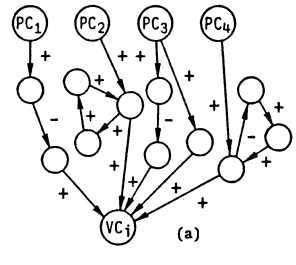
§３　施策効果評価尺度

知識ベース内には、コンセプトの中で政策決定者が施策として操作可能なものが、Policy Conceptとして用意されている。従って、ユーザが解決を求める目標となるコンセプト、即ちGoal Conceptに対する影響可能なPolicy Concept、及びその間の因果連鎖構造から、各Policy Concept－Goal Concept間の影響度を算出すれば、その正成分・負成分は各々、専門家の認識している個々の政策の目標への貢献度・非貢献度を尺度化したものと考えられる。Fig.5(a)に示すようなCognitive Map の簡単な因果連鎖構造例に対し、以上の手続きに従って算出した数値例をFig.5(b)に、そして$\tilde{p}$、$\tilde{n}$両成分を両軸として２次元上に表示したものをFig.6 に示す。なお複数の政策を合わせて施す場合の、政策セットとしての影響度は、図に示すように個々の政策の影響度のベクトル和として算出する。Policy Conceptがｎこの場合には、各政策をとる、とらないにより、政策セットとして$2^n - 1$の組み合わせが考えられる。さらに、こうして得られた$\tilde{p}$、$\tilde{n}$から、

$$s_{ij} \triangleq \tilde{p}_{ij} + \tilde{n}_{ij} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$c_{ij} \triangleq (\tilde{p}_{ij} - \tilde{n}_{ij}) / (\tilde{p}_{ij} + \tilde{n}_{ij}) \quad \cdots(4)$$

に従って導出されるs_{ij}、c_{ij}は各々、各政策の目標に対する因果的関連の強さ(goal-relevancy)，及び各政策の実際効果における貢献性・非貢献性の支配関係を表わす尺度で、$\tilde{p}$、$\tilde{n}$に比べ、政策決定時における決定者の直感に、より訴えやすいものと考えられる。そこでこの両尺度を施策効果評価尺度と呼ぶことにする。Fig.5(b)に、各政策に対するs_{ij}、c_{ij}の数値例を合わせて示す。



(a)

PCj	$\tilde{p}$ji	$\tilde{n}$ji	sji	cji
j=1	0.0	0.422	0.422	-1.0
j=2	0.973	0.0	0.973	1.0
j=3	0.563	0.422	0.985	0.143
j=4	0.684	0.289	0.973	0.406

(b)

Fig.5 Numerical examples (z=0.75)

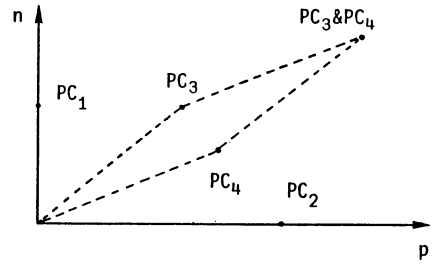


Fig.6 Plotted effects of individual Policy Concepts on P̃×Ñ plane and calculation of effects of a policy set

Ⅳ．意思決定支援システムへの応用

一般に、社会的領域における意思決定では、各種の診断システムに代表されるエキスパートシステムとは異なり、専門的な知識の利用により解が一意的ないしは自動的に決まるといった類のものではなく、決定者個々により、また解決を求める目標により、このような専門的知識をどのようにとらえ、利用していくかには大きな相違が生じてくる。従って DSSとしては、知識ベースに収められた専門家の知識を客観的にとらえた上で、そこにユーザである決定者個有の、問題解決に臨む方略・価値基準をいかに融合してしていくかが重要な要素となる。

§1　決定者の価値基準の抽出

前章までの手続きにより、専門家の認識する各政策セットの目標に対する影響度を、P̃×Ñ上の２属性で定量的に評価することが可能になったわけであるが、ここではこの空間上で定義され、各政策セットのユーザのもつ効用への適合度を指標化する為の価値関数$v(\tilde{p}_{ij}, \tilde{n}_{ij})$[(3)]を導入する。即ち、あるGoal Concept kに対し、各Policy Conceptからの影響度のベクトル和として表わされる、政策セットa_i ($i=1,\cdots, 2^n-1$) からの影響度を$(\tilde{p}_{ik}, \tilde{n}_{ik})$とする時、

$$v(\tilde{p}_{ik}, \tilde{n}_{ik}) \geqq v(\tilde{p}_{jk}, \tilde{n}_{jk}) \Leftrightarrow a_i \succeq a_j$$

を満足するスカラ関数で、P̃×Ñ上でのユーザの選好構造を抽出することにより決定される。この関数の同定に際しては、P̃、Ñ両属性から、よりユーザの直感に訴えやすい(3)(4)式で定義されるS、Cに変換して行なう。このS×C上での選好については以下のように仮定できる。Goal Conceptの内容がユーザにとって望ましいものである場合、まずc＞0 では、s及びcの絶対値が大きい程、価値効用は高まり、c＜0 では逆に、負の価値効用が増す（望ましくないものである場合は、この関係は逆転する）。なおc＝0 、即ち影響度の正負両成分が等しい場合には因果的関連性なしの場合と等価とみなし、効用０で無差別とする。そこでS×C上でのユーザの選好構造をS×C+ (s>0,c>0) 、S×C- (s>0,c<0) の２つの部分空間に分割して各空間上での価値関数を個別に同定する。その際、以下のような仮定を設ける。

(A-4)S×C+(S×C-)上での価値関数v（s，c_+）（v（s，c_-））は確定状況下の２属性基数価値関数である。

(A-5)属性SとC+(C-)は互いに弱選好差独立、即ち一方の属性上の選好差の大きさの順序が、他方の属性のレベルに依存しない。

(A-4) は(A-1) の仮定に基づくものである。Fig.7 はv（s，c_+）の一般形を表示したものであるが（*、° は各々最善値、最悪値を示す）、(A-5) の仮定はここで、各軸に直交する平面での切り口が、原点と単位を共通化すればすべて同一となることを意味する。また基数価値関数に関して以下の定理が導ける。[(4)(5)]

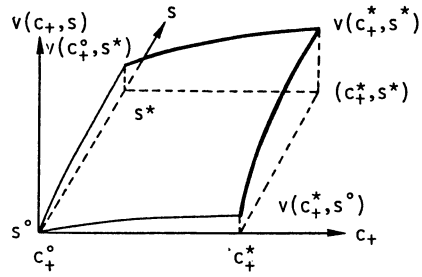


Fig.7 Value function on S×C+

【定理５】v(x° ,y°) ＝０、v(x* ,y*) ＝１とする。属性X、Yが互いに弱選好差独立ならば、

$$v(x,y)=k1\cdot v1(x)+k2\cdot v2(y) + (1-k1-k2)\,v1(x)\,v2(y)$$

$v_1(x)$、$v_2(y)$は各々 y=y* 、 x=x° の時のX、Y上での条件付価値関数で、k1=v(x* ,y°),k2=v(x° ,y*) ■ s° 、c_+° を正の０近傍とするとc＝0,s＝0 で効用が０になるという前提よりk1,k2 →０に漸近し、

$$v(s, c_+) = v_1(s)\cdot v_2(c_+) \quad \cdots(5)$$

で近似できる。従って$c_+=c_+^*$ (=1.0)の時のS上での条件付価値と、s＝s* (=s_{1k}) の時のC+ 上での条件付価値を測定すればS×C+ 上での価値関数v（s，c_+）が構成される。S×C- 上でも同様であるが、この時には負の効用として考える。結局、１つのGoal Conceptに対し、都合４つの条件付価値を測定すれば、そのコンセプトに対する決定者固有の価値基準を反映した価値関数が構成でき、これを用いて各政策セットの選好順序を決定できる。これら４つの価値関数の同定には、効用理論で広く用いられているv(x) ＝ c(1−exp(-bx)) の一般形を想定し、決定者に最善値を提示した上で、v(x) ＝0.5 となるx の値、即ち価値中点を問い掛けて曲線あてはめを行なった。このような同定手法は極めて粗いものであるが、Fig.8 に示すように決定者の定性的な選好傾

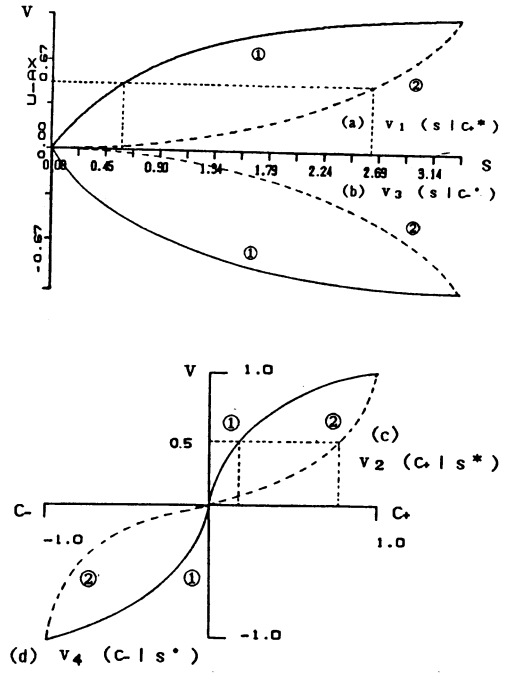


Fig.8 Four conditional value functions

向を抽出するには十分で、例えば(a)の②は直接的な因果的関連をもって問題解決に貢献する政策のみを採用する立場、(b)の①は僅かに間接的ではあっても解決を妨げる政策は極力排除する立場、あるいは又、(c)の②は確実に解決を生む方向で貢献する政策のみを採用する立場を表わしている。そしてこれらの組み合わせにより、個々の決定者の多様な方略を反映することが可能になる。このようにして構成されたv(s, c)を再びP×N上に変換して3次元表示したものをFig.9に示す。図中、太線は各々Fig.7の太線に対応している。

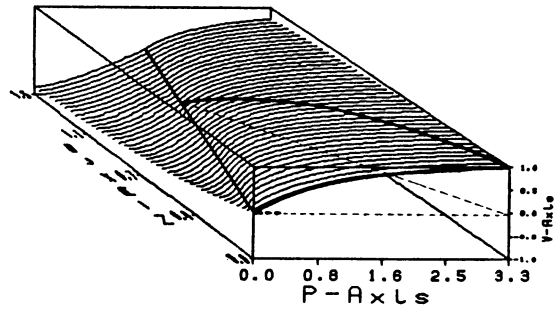


Fig.9 Value function on $\tilde{P}\times\tilde{N}$

§2 複数のGoal Conceptに対する取り扱い

一般に政策決定者は、同時にいくつかの目標に対する施策を求めるものである。そこで、k このGoal Conceptが与えられた場合には、これらのいずれにも影響可能なPolicy Concept群から成る政策セットの集合Aを考え、各Goal Conceptについての価値関数$v^j(s, c)$ (j=1,・・,k)を個別に同定する。そして各政策セットa_iに対するv^jの値の重み付き和、

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v^j(s|_k, c|_k) \quad \cdots\cdots(6)$$

により評価する。ただし、λ_jはGoal Concept jに対する主観的重みで$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$である。この結果、知識ベースの大局的な視野に基づいて、ある政策の副作用も漏らさず考慮していくことができる。

V. 対話型意思決定支援システムの構成

以上の考え方を、京都大学大型計算機センターのPL/1言語によりインプリメントし、TSS グラフィック端末を介する対話型意思決定支援システムを構築した。

§1 対話プロセス

【Step 1】ユーザは知識ベース内のコンセプト群から、問題解決をめざす目標となるものを、Goal Conceptとして選択するとともに、その内容が、促進させたい望ましいものか、抑制したい望ましくないものかを指定する。(この為の検索プロセスについては文献(1)を参照)

【Step 2】システムは選択されたGoal Conceptのいずれにも影響可能なPolicy Concept群を調べた上で代替案候補として提示し、ユーザはこの中から施策可能なものを選択して代替案を特定する。

【Step 3】システムは指定されたGoal Concept, Policy Concept、及びこの間に介在するコンセプト群からなる部分的因果連鎖構造を知識ベースより抽出し、減衰係数zの上限を算出、提示する。そしてユーザの入力したzの値に基づいて、(1)(2)式に従い、行列$\tilde{P}$、$\tilde{N}$を算出する。

【Step 4】各Goal Conceptについて、前章§1の手続きに従って価値関数v(s、c)を同定、Fig.9に示すような3次元表示、及び無差別曲線を合わせて提示し、ユーザの確認を仰ぐ。これをすべてのGoal Conceptに対し繰り返す。

【Step 5】システムはSaaty の手法に基づき、ユーザにGoal Concept間の相対的重要度の一対比較を順次問い掛け、重み係数λ_jを決定する。

【Step 6】システムは(6)式に従って、指定されたPolicy Conceptから成る政策セットのユーザの効用への適合度を評価し、最適政策セットから順にユーザに提示する。

§2 対話出力例

Fig.10(a)は、「73.地域経済格差」の単一のGoal Conceptに対し、これを是正すべき政策セットを求めたシステムの対話プロセスの出力例の一部である。またFig.10(b)は、こ

の問題の解決に際して、２通りの方略を反映した価値関数及びその結果であるが、①は直接的な政策で、飽和現象的な徐々なる格差の是正を求める場合、②はたとえ間接的な政策でもよいが、より確実な改善策を求める場合である。前者の場合には、ユーザが施策可能と指定したすべての政策を合わせとることを、そして後者の場合には、その内「8.交通機関の整備」「6.ターミナルの整備」の両者のみを合わせとることを進言している。

```
#####  1    EFFECT MATRIX MAKING

  I WANT TO KNOW YOUR REQUEST.
  PLEASE KEY IN THE NUMBERS OF YOUR TARGET VALUES.
  AND,WHEN FINISHED,KEY IN 0,PLEASE.
:
73 0

     73.REGIONAL      DIFFERENCE OF    ECONOMIC POWER

DO YOU THINK THIS REQUEST AS DESIRABLE OR UNDESIRABLE ?
     DESIRABLE ** 1          UNDESIRABLE ** 2
:
2

  I CHOSE POLICIES WHICH GIVE EFFECT TO YOUR REQUEST.

     22.RELEASE.PUB- LIC TRANS.FROM   PUBLIC DUTIES
     50.REGIONAL     UNBALANCE OF     PUBLIC INVEST.
     72.UNFAIR       PRIORITY SYSTEM  FOR CAR-PRODUCT
     92.UNFAIR       TRAFFIC POLICY   FOR CARS
     99.PARTIAL      PUBLIC INVEST.   IN ROADS
     117.SELF-SUP-   PORTING SYSTEM   IN TRAF.CORP.
     127.POLICY      SUPPORTING       PUBLIC TRAFFIC
     140.IMPROVE. OF ROADS
     151.SETTING NO  TRUCK PASSING    AREA IN DAYTIME
     1.PEAK ROAD     PRICING
     6.IMPROVE. OF   TRAFFIC          TERMINALS
     7.CONNECTION OF NATL.&PRIVATE    RAILWAYS
     8.IMPROVE. OF   TRAFFIC          FACILITIES

  I WANT TO KNOW YOUR POLICIES.
  PLEASE KEY IN THE NUMBERS OF YOUR TARGET POLICIES.
  AND,WHEN FINISHED,KEY IN 0,PLEASE.
:
127 8 6 59 0

  I REPEAT YOUR POLICIES.IS THIS CORRECT?(YES=1,NO=0)

     127.POLICY      SUPPORTING       PUBLIC TRAFFIC
     8.IMPROVE. OF   TRAFFIC          FACILITIES
     6.IMPROVE. OF   TRAFFIC          TERMINALS
     59.CONTROL OF   PARKING CARS
:
1

  THERE ARE  67 CONCEPTS IN C.K.BASE,WHICH ARE RELEVANT TO YOUR
  REQUESTS.
  PLEASE GIVE ME THE PATH WEIGHT.
  BUT,THE VALUE MUST BE LESS THAN 0.440,FOR AVOIDING DIVERGENCE
:
0.4

IN THIS CASE,THE EFFECT GIVEN THROUGH  2.5PATHS OF DISTACE 2
EQUALS THE EFFECT GIVEN THROUGH 1 PATH OF DISTANCE 1.

  THANK YOU.

  PLEASE WAIT A LITTLE.I AM CALICULATING EFFECT MATRIX.

#####  2    PREFERENCE CHARACTERISTIC CHECK

  NOW,I WANT TO KNOW YOUR PREFERENCE CHARACTERISTIC.

  PLEASE ANSWER MY QUESTION.

THE POLICY WHICH HAS THE MAXIMUM TOTAL EFFECT
TO THIS VALUE: 73.REGIONAL     DIFFERENCE OF    ECONOMIC POWER
IS :127.POLICY      SUPPORTING       PUBLIC TRAFFIC
 AND THE VALUE IS   1.197.

GIVE ME THE VALUE MIDPOINT OF CAUSAL RELEVANCY CONSIDERING THAT
THE IDEAL SCORE IS  1.528.

:
1.0
```

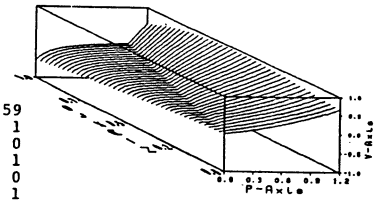
Fig.10(a) A part of question answering process of the system

```
#3  BEST POLICY SET

VALUE  POLICIES
       127   8   6  59
 0.472   1   1   1   1
 0.452   1   1   1   0
 0.442   1   1   0   1
 0.422   1   1   0   0
 0.314   1   0   1   1

THE BEST POLICY SET IS AS FOLLOWS.

  127.POLICY      SUPPORTING       PUBLIC TRAFFIC
  8.IMPROVE. OF   TRAFFIC          FACILITIES
  6.IMPROVE. OF   TRAFFIC          TERMINALS
  59.CONTROL OF   PARKING CARS
```



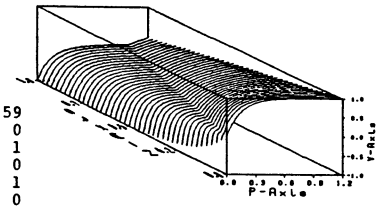
①

```
#3  BEST POLICY SET

VALUE  POLICIES
       127   8   6  59
 0.455   0   1   1   0
 0.439   0   1   1   1
 0.427   0   1   0   0
 0.414   0   1   0   1
 0.344   1   1   1   0

THE BEST POLICY SET IS AS FOLLOWS.

  8.IMPROVE. OF   TRAFFIC          FACILITIES
  6.IMPROVE. OF   TRAFFIC          TERMINALS
```



②

(b) Value functions and final results for two different strategies

VI．あとがき

本研究では、知識ベースの知識をあるがままにとらえ、専門家の認識構造のみに着目して、その量的豊富さから、大局的視野に立った支援を行なうシステムについて報告した。これに対し現在は、専門家の認識の内容に立ち入り、知識ベースの膨大な量の知識の中から、互いによく似た繰り返される構造を認識し、帰納的に問題状況の特性を引き出すという、知識の質を重視するシステムの開発を進めている。

【参考文献】

(1) K.Nakamura,S.Iwai,T.Sawaragi,"Decision Support Using Causation Knowledge Base,": IEEE Trans. Vol.SMC-12,No.6,1982.

(2) R.Axelrod,"Structure of Decision," Princeton Univ. NJ,1976.

(3) キニー、ライファー、「多目的問題解決の理論と実例」、構造計画研究所、1980.

(4) 椹木、河村、「参加型システムズアプローチ」、日刊工業新聞社、1981.

(5) J.S.Dyer,R.K.Sarin,"Measurable Multiattribute Value Functions," Operations Research,Vol.27,No.4, 1979.

ファジィ伝播モデル

大阪府立大学　森　健一

1. はじめに

社会や自然における各種の成長，減衰の現象を数理的に追求する分野がある。その代表的なものとして、イノベーションや新製品の普及過程を解明しようとするものがある。また、生態学における各種の生物系の人口増減のモデルや流行病の感染モデルなども同様のジャンルに分類される。

普及現象は、一般にはロジスティックや指数などの成長曲線としてモデル化されている。他方、物物人口のような増減を考える場合には、発生と消滅を扱う必要があり，異なるアプローチがとられる。モデルとしては確率的な定式化と確定的な定式化に分けられるが，数学的な構造はほとんど同様である。

そして，その基礎となる定式化，モデル化の段階でいくつかのファジィ性が考えられる。本研究では、定式化の段階で考えられる3種のファジィ性を導入したモデルを解析し，非ファジィモデルとの相違点を明らかにする。対象とする方程式系はすべて離散型とし，一変数系のモデルをとりあげる。

研究の主目的は、この種のモデル方程式で生じる分岐現象（bifurcation）へのファジィ性の影響である。すなわち，モデルに含まれるパラメータにより，方程式は種々のパターンをとりうるが，その分岐像へのファジィ性の影響を調べる。とくに、基礎となる方程式が非線型の場合には、閉じた解が求まらず，分岐像の解析は数値的方法にたよらざるを得ない。

2. 成長曲線を表わす離散型方程式

時点 t での伝播率または普及率を x_t とすると、離散型

での成長曲線の一般型は

$$x_{t+1} = f(x_t, a) \qquad t = 0, 1, 2, \cdots \qquad (1)$$

$$x_0, a \in R$$

となる。ここに、aはパラメータであり、x_0は与えられた初期値である。$f(x)$の例としては、ax, $a(1-x)$, $ax(1-x)$などがある。ファジィ性を導入するための基礎になる方程式としてここでは、規準化された(すなわち$x_t \in [0,1]$)非線型の関係式

$$x_{t+1} = a(1-x_t)x_t \qquad a \in [0,4] \qquad (2)$$

を用いる。

このt→∞としたx_tの分岐図は図1に示す通りである。すなわち、パラメータaの値により収束値の様子が変化するわけである。この図ではパラメータaを[2.5, 4]しかとっていないが、実際には[0, 1]では、収束値は0である。

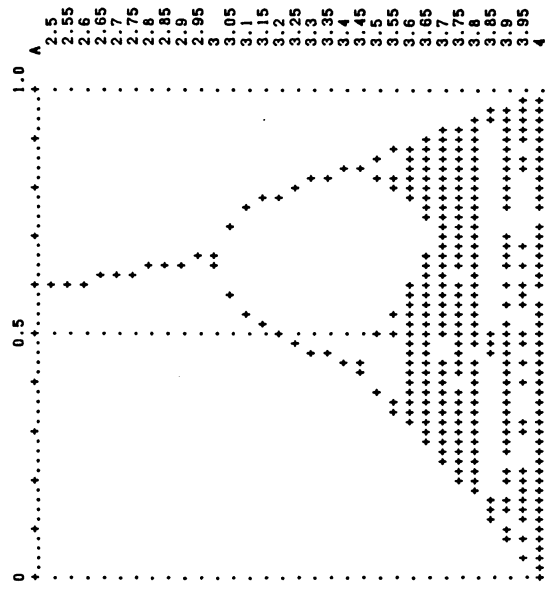


図1. (2)の分岐図

収束値は、$x = f(x)$より得られる不動点$\bar{x}$の値と関連している。式(2)では、これは

$$a \in [0,4] \text{ で } \quad \bar{x} = 0 \qquad (3)$$

$$a \in [1,4] \text{ で } \quad \bar{x} = 1 - 1/a \qquad (4)$$

となる。不動点(3)は$a<1$で漸近安定で、$a>1$では不安定である。一方、(4)は[1, 3)では漸近安定であり、$a>3$では、不安定となる。

さらに，$a \in [3, 1+\sqrt{6}]$では2周期の系列が発生し，$a > 1+\sqrt{6}$では様々の周期の振動系列が生まる。この状況は、図1に示す通りである。また、式(2)により求められる現象のパターンは図2のようになる。すなわち，

$0 \leq a < 1$ では単調減少，　$1 \leq a \leq 2$では単調増大で $x_t \to \bar{x}$ $(t \to \infty)$，$2 < a \leq 3$では振動的に増大し $x_t \to \bar{x}$，$3 < a \leq 1+\sqrt{6}$ では周期2の振動に漸近する。$a > 1+\sqrt{6}$では，tの増大とともに 2^n 周期の振動系列が次々と出現する。

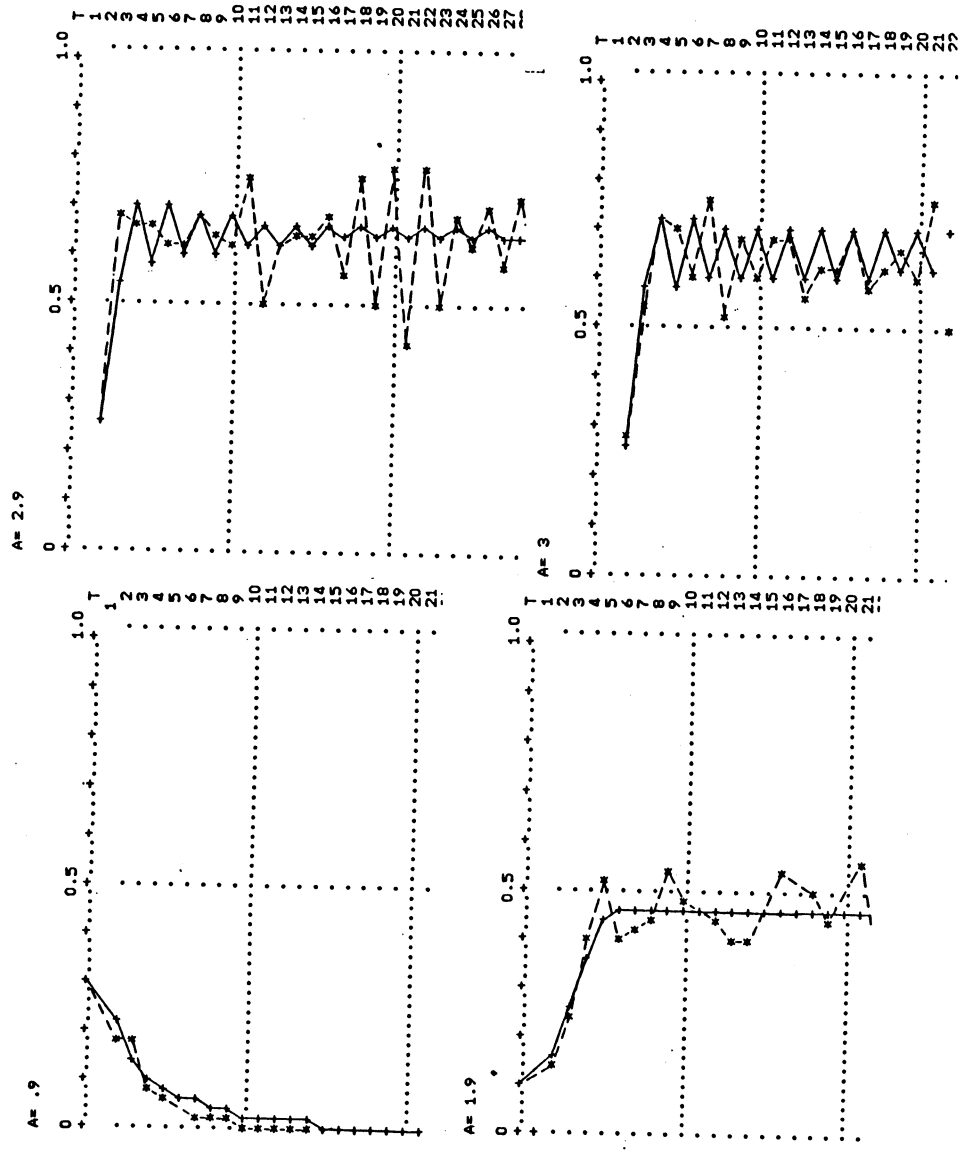


図2. (2)により示される現象のパターン.

3. ファジィ伝播モデル

ここで述べた分岐現象に対して，ファジィ性がどのような影響を与えるかについて調べる。ここでは，ファジィ性の入るケースとして次の3つの場合を考える。

i) パラメータ a に関するファジィ性

$$\underset{\sim}{x}_{t+1} = f(\underset{\sim}{x}_t, \underset{\sim}{a})$$

ii) 伝播メカニズムに関するファジィ性

$$\underset{\sim}{x}_{t+1} = \underset{\sim}{f}(x_t, a)$$

iii) 応答時点に関するファジィ性.

$$x_{t+1} = f(\underset{\sim}{x}_t, a)$$

以下で，それぞれの場合について論じよう。

3.1. パラメータ a に関するファジィ性.

伝播現象における不確実性は，一部，そこに含まれるパラメータ値のファジィ性に起因すると考えられる。すなわち，イノベーションの伝達などでもその伝達率は関係者同志の出会いや，その伝達内容の豊かさなどのあいまいさを含んだ状況により定まってくる。そして，一般的には時間経過の影響をも受けるものと考えられる。ここでは、式(2)のモデルでパラメータ a がファジィ性をもつ状況での分岐像を考えよう。

具体的には、メンバーシップの関数として正規分布関数を用いシミュレーションにより図1と同様の分岐像を求めた。標準偏差を0.2としたときの結果は図3に示すようになった。同図で実線は非ファジィの場合の分岐像であり，$a=3.4$ の付近までは明確に示せる。

予期されたように，a がファジィになった結果，種々の周期の振動が $a<3$ でも発生される。これは、図2で実線で示す通りである。しかし，それらは与えられた正規分布の標準偏差Sの値

により定まるある区間内にはいっている。もう一つ着目すべき点は，$\alpha=3$の分岐点の近傍である。すなわち，ファジイ性により定まる区間でみた場合に，分岐の点が3より少し後にずれている。これは，αのファジイ性により，予期せぬ変動が加わった結果小さな周期のところでは，両者の差の見分けがつき難くなったことによるものである。理論的にもあるαレベルでの不動点の変化により分岐に遅れがでるものとみなしうる。

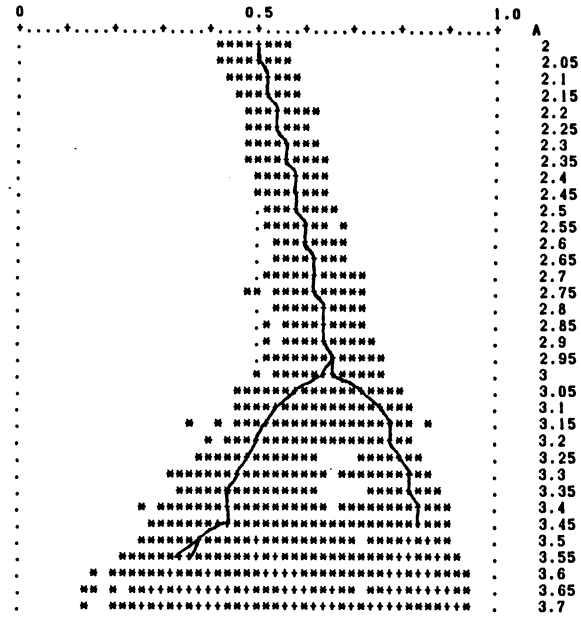


図3. ファジイ分岐図

3.2、伝播メカニズムによるファジイ性

伝播を表現しうる$f(x)$には様々のものがある。ここでは，$f(x)$のメンバーシップ関数(f)を考えて

$$x_{t+1} = a(\alpha+\beta x_t)(1-x_t) \qquad (5)$$

$$x_{t+1} = a\left[(\alpha+\beta x_t)(1-x_t) + \gamma x_t\right] \qquad (6)$$

などのモデルが求められる。(5)のモデルはBass(3)によるものと一致する。

3.3、応答時点に関するファジイ性

ある時点tでの普及率x_tに影響を与えるのは1時点前の値のみとは限っていない。とくに，ロジスティック型のような2集団の相互関係を考える場合には，その関係が生じた時点はファジイ性をもっている。式(2)のモデルでは，これは

$$x_{t+1} = a\,\underset{\sim}{x_t}\,(1-x_t) \qquad (7)$$

のように定式化される。いまtのメンバーシップ関数$\chi_t(x_t)$

より

$$x_{t+1} = a\left(\sum_i \chi_t(x_t)\, x_i\right)(1-x_t) \qquad (8)$$

のようなモデルが考えられ，メンバーシップが (c_t, c_{t-1}) とすれば

$$x_{t+1} = a\left(c_t x_t + c_{t-1} x_{t-1}\right)(1-x_t) \qquad (9)$$

の型のモデルが求められる。式(9)は線形部分においても種々のパターンが表現できる。

4. 結言.

分岐理論においては多くの試みがなされているが，理論として確立されている部分はわずかである。これは，主に対象としている非線型モデルの複雑さに起因する。このような研究にファジィ性を考慮することにより，より多様な研究が期待できる。

＊参考文献

1) Catini, M.: Lecture Note in Math. No. 1057, Bifurcation Theory and Applications, Springer (1983).
2) Iooss, G.: Bifurcation of Maps and Applications, North-Holland P.C. (1979).
3) Bass, F.M.: "A New Product Growth for Model Consumer Durables", Management Sci., Vol.15, No.5, pp.215～227 (1969).
4) Bartholomew, D.J.: Stochastic Models for Social Processes, John Wiley (1967).
5) 山口昌哉：入門現代の数学(2) 数値解析と非線形現象，日本評論社 (1981)

５月２９日（水）

ファジィ観測によるデータ処理に対する補正について

大阪工業大学　奥田徹示

1. まえがき

確率空間におけるファジィ事象の確率がZadehによって導入されて以来，Zadehの考え方に沿って，拡張原理[2]にもとづくファジィ集合論的な演算を基礎としたファジィ確率変数に関する研究がなされてきている。[3),4)]本研究においても，Zadehのいうファジィ事象の確率の考え方にしたがうが，単に観測のみがファジィである場合を取り扱う。そこで，ファジィ観測りデータを通常の統計的手法にあてはめて計算したとき，メンバシップ関数を背景としてデータを解釈することにより，どの程度の補正が見込まれるかについて検討している。なお，本研究で導かれる補正はSheppardの補正と類似したものである。[5),6)]

2. ファジィ観測の平均と分散

ここでは，母集団は正規分布$N(\mu,\sigma^2)$をなしているものとして，その密度関数を$f(x|\theta)$と表わす。θは母数を意味しているが，θを書くと煩雑になると思われる場合は省略することにする。また，議論の各段階で，ここでの正規母集団の制約はきつすぎると思われるような部分もあるが，一応原則的に正規母集団を前提としておく。

通常，観測値はある確定した値xが観測されたとして1点で示されるが，ここでは，点xのまわりのある幅に主観的なあいまいさが存在しているような観測を考える。そこで，hの幅で定義された

$$\chi_i(x)=\begin{cases}2/h\cdot(x-x_i)+1, & (x_i-h/2\leq x\leq x_i)\\ -2/h\cdot(x-x_i)+1, & (x_i\leq x\leq x_i+h/2)\end{cases} \tag{1}$$

なるメンバシップ関数（$x_{i+1}=x_i+h/2$, $i=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$）で表現されるファジィ観測を設定する。これは，$x_i$を中心として両側に$h/2$の幅で観測りに対するあいまいさが存在することを表わしている。現実には，観測者から代表値x_iが報告され，メンバシップ関数χ_iはデータを処理する側の観測値のもつあいまいさに対するある種の想定であるという一応の解釈のもとに考察を進めることにする。

さて，Zadehの定義より，ファジィ事象χ_iの確率は

$$P_i=\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}\chi_i(x)f(x)\,dx \tag{2}$$

と表わされる。ここで，$\sum_{i=-\infty}^{\infty}P_i=1$は成立している。そこで，いまの場合$\chi_i$とは無関係となる量

$$g_h=\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}\chi_i(x)(x-x_i)^h\,dx \tag{3}$$

を k 次のFモーメントと呼ぶことにすれば，このFモーメントを用いて，x_i を中心にした $f(x)$ のテイラー展開を行なって

$$P_i = \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \chi_i(x)\left\{f(x_i)+f'(x_i)(x-x_i)+\frac{f''(x_i)}{2!}(x-x_i)^2+\cdots\right\}dx$$

$$= f(x_i)g_0 + f'(x_i)g_1 + \frac{f''(x_i)}{2!}g_2 + \cdots\cdots \qquad (4)$$

となる。そこで，ファジィ観測 X_i を確率変数の場合と同様に考えて，その平均を計算すると，

$$E\{X_i\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \cdot P_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{h}{2}\right)x_i \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2f^{(k)}(x_i)}{k\cdot k!}g_k\right\} \fallingdotseq \int_{-\infty}^{\infty} x\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2g_k}{k!\cdot k}f^{(k)}(x)\right]dx \qquad (5)$$

となる。ここで，$f(x)$ が正規分布の形をしていることを考慮するとき，オイラー・マクローリンの公式より，式(5)の和分から積分へ移行する場合の近似誤差は任意の自然数 r に対して $O((h/2\sigma)^r)$ の形で表わされる。[5),7)] また，$g(x)$ を標準正規分布の密度関数とし，n 次のチェビシェフ・エルミート多項式[8)] を $H_n(x) = g(x)^{-1}(-\frac{d}{dx})^n g(x)$ で定義すると，$f^{(n)}(x) = (-1)^n\sigma^{-n}H_n(z)f(x)$，$z = (x-\mu)/\sigma$ と表わされる。このエルミート多項式と g_k の具体的な形を用いて P_i を表わすと，$d_k = [1+(-1)^k]/2$ として，

$$P_i = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k\cdot h^{k+1}\cdot(-1)^k\cdot\sigma^{-k}\cdot H_k(z_i)}{(k+2)(k+1)\cdot 2^k\cdot k!}f(x_i)$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_i)+\frac{1}{48}\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 H_2(z_i)f(x_i)+\frac{1}{5760}\left(\frac{h}{\sigma}\right)^4 H_4(z_i)f(x_i)+\cdots\right] \qquad (6)$$

となり，これを用いて式(5)の計算を進めると，

$$E\{X_i\} \fallingdotseq \int_{-\infty}^{\infty}\left[xf(x)+\frac{1}{48}\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2\left\{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}-1\right\}xf(x)+\frac{1}{5760}\left(\frac{h}{\sigma}\right)^4\left\{\frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4}-\frac{6(x-\mu)^2}{\sigma^2}+3\right\}xf(x)+\cdots\right]dx = \mu \qquad (7)$$

となる。同様に X_i の分散 $V\{X_i\}$ を計算すると，

$$V\{X_i\} \fallingdotseq \sigma^2\left\{1+\frac{1}{24}\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2+O((h/\sigma)^4)\right\} \qquad (8)$$

となる。式(7)より平均には偏りがないが，式(8)により，ファジィ観測データから分散を推定する場合，正確な観測に比べて，$(h/\sigma)^4$ 以上の項を無視して $h^2/24$ の偏りが生じることが分かる。つまり，$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$，$S_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/(n-1)$ とすれば，$E\{S_n - h^2/24\} \fallingdotseq \sigma^2$ となっていて，$S_n - h^2/24$ は近似的にではあるが σ^2 の不偏推定量となっている。したがって，分散の増加率 $(1/24)(h/\sigma)^2$ は一般には小さな値となるが，近似的な不偏推定量 $S_n - h^2/24$ の補正項がれとは無関係であり，やはり補正する方がよいであろうことを式(8)は意味していると考えられる。なお，メンバシップ関数を区間 $[x_i-h/2,\ x_i+h/2]$ の特性関数とし，間隔 h の幅でデータを級分けして処理する場合，Sheppardの補正値として知られている値 $h^2/12$ と一致する。

3. 最尤推定について

さて，n 個の独立なファジィ観測列 $\{X_i\}$ を考え

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} P_i(\theta)\ ,\quad \ell(\theta)=\log L(\theta) \tag{9}$$

とする．そこで，$\ell(\theta)$ を最大とする最尤推定量 $\hat{\theta}$ について考えてみる．式(6)の P_i を用い，$\log P_i$ の $(h/\sigma)^4$ 以上の項を無視すると，

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta}\fallingdotseq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \log f(x_i|\theta)}{\partial\theta}+\frac{h^2}{48}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma^{-2}H_2(x_i|\theta)\right)\right)=0 \tag{10}$$

なる近似的な尤度方程式が導かれる．式(10)の第2項カッコ内を $u(x_i|\theta)$ と表わすものとすると，式(10)の後半は

$$U(\theta)\equiv\sum_{i=1}^{n}u(x_i|\theta)=0 \tag{11}$$

となる．そこで，$U(\theta)=0\Leftrightarrow\theta=\hat{\theta}_n$ として，$U(\hat{\theta}_n)$ をテイラー展開して導かれる

$$-\frac{1}{n}U(\theta)=\frac{1}{n}\left[\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}\right]_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_n-\theta),\quad \bar{\theta}=\alpha\hat{\theta}_n+(1-\alpha)\theta,\ 0<\alpha<1 \tag{12}$$

なる式と，大数の法則とから，h が σ に対して極端に大きくないという制約 $((h/\sigma)^2<12)$ のもとでは，μ と σ^2 に対しては $\hat{\theta}_n$ は近似的に一致推定量となることが示される?) いま，具体的に $\hat{\theta}_n$ の形を求めてみると，いまの制約条件のもとに，μ については

$$\hat{\theta}_n(\mu)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{13}$$

が，σ^2 については，$S_n'=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n$ として，$(h/\sqrt{S_n'})^4$ 以上の項を無視して，

$$\hat{\theta}_n(\sigma^2)=S_n'\left\{1-\frac{1}{24}\left(\frac{h}{\sqrt{S_n'}}\right)^2\right\} \tag{14}$$

が式(11)を満たす．そして，これらをチェビシェフの不等式で直接的に評価してみると，$(h/\sigma)^4$ 以上の項を無視して，

$$P(|\hat{\theta}_n(\mu)-\mu|\geq\varepsilon)\leqq\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sigma^2+\frac{h^2}{24}\right)\xrightarrow{(n\to\infty)}0 \tag{15}$$

$$P(|\hat{\theta}_n(\sigma^2)-\sigma^2|\geq\varepsilon)\leqq\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left(2\sigma^4+\frac{h^2\sigma^2}{6}\right)\xrightarrow{(n\to\infty)}0 \tag{16}$$

となり，$\hat{\theta}_n$ は近似的な意味で一致推定量になっていると考えることができるように思われる．

4. 情報量の損失について

ここでは，多少一般的に記述するためと計算を簡素化するために，$u=x/\sigma$ なる変換を行ない，メンバシップ関数 $\chi_i(x)$ は $\psi_i(u)$ に，密度関数 $f(x)$ は $\phi(u)$ に変わるものとする．したがって，$h/\sigma=\alpha$ として，

$$P_i=\int_{u_i-\alpha/2}^{u_i+\alpha/2}\psi_i(u)\phi(u)\,du\ ,\quad \psi_i(u)=\begin{cases}2/\alpha\cdot(u-u_i)+1 & (u_i-\alpha/2\leq u\leq u_i)\\ -2/\alpha\cdot(u-u_i)+1 & (u_i\leq u\leq u_i+\alpha/2)\end{cases} \tag{17}$$

となる．なお，式(6)と同様に P_i の形を書くと，

$$P_i=\frac{\alpha}{2}\phi(u_i)+\frac{\alpha^3}{96}\phi''(u_i)+\frac{\alpha^5}{11520}\phi^{(4)}(u_i)+\cdots\fallingdotseq\frac{\alpha}{2}\phi(u_i)\left[1+\frac{\alpha^2}{48}\frac{\phi''(u_i)}{\phi(u_i)}\right] \tag{18}$$

となり，これより

$$\log P_i\fallingdotseq\log(h/2)+\log(\phi(u_i)/\sigma)+\frac{h^2}{48}\frac{\phi''(u_i)}{\sigma^2\phi(u_i)} \tag{19}$$

となる．そこで，フィッシャーの情報量を計算すると，

$$\begin{aligned}I=-\sum_{i=-\infty}^{\infty}P_i\frac{\partial^2\log P_i}{\partial\theta^2}&\fallingdotseq-\sum\left(\frac{\partial^2\log(\phi(u_i)/\sigma)}{\partial\theta^2}\right)\frac{\alpha}{2}\phi(u_i)\\&-\sum\left[\frac{h^2}{48}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\phi''(u_i)}{\sigma^2\phi(u_i)}\right)\right]\frac{\alpha}{2}\phi(u_i)-\sum\left[\frac{\partial^2\log(\phi(u_i)/\sigma)}{\partial\theta^2}\right]\frac{\alpha^3}{96}\phi''(u_i)\\&-\sum\left[\frac{h^2}{48}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\phi''(u_i)}{\sigma^2\phi(u_i)}\right)\right]\frac{\alpha^3}{96}\phi''(u_i)\end{aligned} \tag{20}$$

となる．ここで，正規母集団の前提のもとに，$\theta=\sigma$ の場合をも含めて式(20)の第4項は $O((h/\sigma)^5)$ となるので，この項を無視し，

$$I^*\equiv-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\log f(x)}{\partial\theta^2}\right)f(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\log(\phi(u)/\sigma)}{\partial\theta^2}\right)\phi(u)\,du \tag{21}$$

であることを考慮して，式(20)を積分へ移行すれば

$$I^*-I\fallingdotseq\frac{h^2}{48}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial^2\log(\phi(u)/\sigma)}{\partial\theta^2}\frac{\phi''(u)}{\sigma^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\phi''(u)}{\sigma^2\phi(u)}\right)\phi(u)\right]du \tag{22}$$

が導かれる．したがって，情報量の損失は，式(22)の $\Delta I=I^*-I$ で計算される．いま，正規母集団の場合に対して，μ および σ についての ΔI を求めれば

$$\Delta I(\mu)\fallingdotseq(h/\sigma)^2/24\sigma^2,\quad \Delta I(\sigma)\fallingdotseq(h/\sigma)^2/6\sigma^2 \tag{23}$$

となる．そこで，$(h/\sigma)=1/2$ としてみると，情報量の損失率は $\Delta I(\mu)/I^*(\mu)\fallingdotseq(h/\sigma)^2/24\fallingdotseq0.01$，$\Delta I(\sigma)/I^*(\sigma)\fallingdotseq(h/\sigma)^2/12=0.02$ となる．

このように，補正量は小さくなるが，逆にいえば，正規分布そのものが多少のあいまいさを含むデータ処理に対しても十分意味をもつようなものになっていると考えられる．したがって，むしろどのような場合に補正量がもはや補正量と呼べない程度に大きくなってしまうかというような問題が重要になると思われる．本研究での議論で基本的な前提となるのは，密度関数が必要な回数だけ微分できること，和分から積分への移行の近似が意味を失わないこと，幅 h と尺度母数 σ との比の形で誤差項が評価できること（本研究の範囲に限っても，$h/\sigma>1$ となれば誤差項の評価は困難となるであろう），微分と積分との交換が自由でフィッシャーの情報量がうまく計算できることなどであると考えられる．なお，幅 h そのものがわずかな幅であり，(h/σ) の形にしなくても意味をもつ場合はもう少し条件は緩和されるであろう．一般には，推定における正則条件[10]とよく似たものであろうと考えられるが，今後検討すべき課題であろう．

5. メンバシップ関数についての検討

以上，三角型のメンバシップ関数について計算してきたが，同じくhの幅で定義される

$$\chi_i(x)=\begin{cases} 8/h^2\cdot\{(x-x_i)+h/2\}^2, & (x_i-h/2\leqq x\leqq x_i-h/4) \\ -8/h^2\cdot(x-x_i)^2+1, & (x_i-h/4\leqq x\leqq x_i+h/4) \\ 8/h^2\cdot\{(x-x_i)-h/2\}^2, & (x_i+h/4\leqq x\leqq x_i+h/2) \end{cases} \tag{24}$$

なる放物型のメンバシップ関数を用いると，式(6)に対応するP_iは

$$P_i=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k(2^{k+2}-1)h^{k+1}(-1)^k\delta^{-k}H_k(z_i)}{(k+3)(k+2)(k+1)2^{2k}\cdot k!}f(x_i)$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(x_i)+\frac{1}{64}\left(\frac{h}{\delta}\right)^2H_2(z_i)f(x_i)+\frac{1}{10240}\left(\frac{h}{\delta}\right)^4H_4(z_i)f(x_i)+\cdots\right] \tag{25}$$

となる。そこで，$(h/\delta)^4$以上の項を無視して，補正量の変化は$(1/64-1/48)/(1/48)=-0.25$となり，25%減となる。したがって，補正量そのものは小さいかも知れないが，補正量の変化率はそれほど無視できないものであろう。なお，ここではメンバシップ関数を三角型，放物型などに固定した議論となっているが，あらかじめ大たいのメンバシップ関数の形を定めて議論する場合は他の研究例[11),12)]にも見られる。

次に，実際のデータ処理に当ってもう少し現実的な場面を想定してみる。いま，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$として，ファジィ観測をした場合，ここでの議論では式(1)で示されるメンバシップ関数の中心値x_iを，いわばファジィ観測の代表値と考え，得られたデータ$\{x_i\}$を通常の統計的方法によって処理しようとしている。そこで，n個のデータをとるとして，i番目の実際の実現値がy_iで，$y_i\in[x_i-h/4,\ x_i+h/4]$のとき，ファジィ観測としてその代表値$x_i$がとられるものと考えてみる。このように考えれば，$z_i=y_i-x_i$は一種の誤差と考えられるので，$\bar{z}=\sum z_i/n$として，標準誤差$\sqrt{E\{\bar{z}^2\}}$を計算してみる。前節と同様，$y_i/\delta=u_i$，$x_i/\delta=v_i$，$z_i/\delta=w_i$，$h/\delta=\alpha$と変換すると，$w_i=u_i-v_i$，$-\alpha/4\leqq w_i\leqq\alpha/4$となる。ある$v_i$と$-\alpha/4<w_0<w_0+dw<\alpha/4$に対して，

$$P(v=v_i,\ w_0<w<w_0+dw)\fallingdotseq\phi(v_i+w_0)dw=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_0^k}{k!}\phi^{(k)}(v_i) \tag{26}$$

であるので，

$$E\{w^2\}\fallingdotseq\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{-\alpha/4}^{\alpha/4}w^2\phi(v_i+w)dw\fallingdotseq\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\alpha^2}{24}\phi(v)+\frac{\alpha^4}{2560}\phi''(v)+\cdots\right\}dv\fallingdotseq\frac{\alpha^2}{24} \tag{27}$$

となり，$E\{\bar{z}^2\}\fallingdotseq\delta^2\cdot\alpha^2/24\cdot n=h^2/24\cdot n$となって標準誤差は$\frac{4}{3}h/\sqrt{8}n$となる。ところで，実は

$$E\{\bar{z}^2\}=E\{(\Sigma(y_i-x_i)/n)^2\}=E\{(\bar{y}-\bar{x})^2\} \tag{28}$$

となるから，標準誤差$h/2\sqrt{6}n$は，通常の観測値y_iを用いて推定する平均と，ファジィ観測として代表値x_iを用いて推定する平均とにどの程度の標準誤差があるかを示していると考えられる。

このような意味で考えるならば，分散についても標準誤差を考えることに意味があると考えられる．この場合には，ファジィ観測の場合に対して式(8)で示されているような補正を施した分散と通常の観測値から推定する分散との標準誤差はサンプル数nとともに減少する形になると考えられる．しかしながら，推定する母数の種類に直接関係しない形で，一般的に母数θを推定する場合に見込まれる標準誤差が一般的な形で計算できれば，この種の議論はもう少し一般的になるものと思われる．

参考文献

1) L.A. Zadeh: "Probability Measures of Fuzzy Events", J. Math. Anal. Appl., 23, 421-427 (1968).
2) M. Mizumoto and K. Tanaka: "Some Properties of Fuzzy Numbers", in Advances in Fuzzy Set Theory and Applications (M.M. Gupta et al eds.), North-Holland, 153-164 (1979).
3) H. Kwakernaak: "Fuzzy Random Variables - I; II", Inform. Sci., 15, 1-29 (1978); 17, 253-278 (1979).
4) M. Miyakoshi and M. Shimbo: "A strong Low of Large Numbers for Fuzzy Random Variables", Fuzzy Sets and Systems, 12, 133-142 (1984).
5) R.A. フィッシャー (遠藤・鍋谷訳): 「研究者のための統計的方法」, 森北, 267 (1970).
6) 竹内: 「数理統計学の方法的基礎」, 東洋経済, 67 (1973).
7) 赤坂: 「数値計算」, コロナ社, 171 (1973).
8) 栗田: 「正規分布 特性と応用」, 東京大学出版会, 74 (1951).
9) 奥田: "ファジィ観測による正規母集団に関する推定", 日本経営工学会講演予稿集, 1985. 5. 21.
10) 竹内: "非正則な場合の漸近理論", 数理科学, No. 219, 47-54 (1981).
11) 和多田, 田中, 横山, 浅居: "ファジィ時系列モデルとその予測問題への応用", 日本経営工学誌, 34, 180-186 (1983).
12) 田中, 市橋, 浅居: "ファジィ関数によるファジィ線形計画問題の定式化", 計測自動制御学会論文集, 19, 928-930 (1983).

ファジィ数量化理論

和多田　淳三　（龍谷大学）
田中　英夫　（大阪府立大学）

1．　まえがき

Zadeh はファジィ集合の概念[1] を用いてファジィ事象の確率測度を1968年に提案している[2] 。すなわち、標本空間上に確率集合とファジィ集合とが定義されている事象を扱っている。一方、広田はファジィ集合の帰属度の測定の困難さを克服するために確率の概念を導入している[3] 。タイプ2ファジィ集合[18]が帰属度のあいまいさをファジィ数[19]として扱うのに対し、広田は帰属度を確率的に取り扱っている。また、Kwakernaakは　n次元ユークリッド空間上の確率事象に関して事象の値が人間の認識のあいまいさを反映してファジィ数となる場合を扱っている [4], [5]。

以上のように事象を取り扱う方法として確率的な方法のみでなく、種々のアプローチが状況に応じて可能である。多変量解析手法についても確率的な枠組みのみでなく、上述のファジィ事象の概念のもとに理論を構成することが可能である。例えば、田中らはファジィ数で与えられたデータの回帰分析をＬＰ問題に帰着させる方法を提案している[6] 。また、和多田らは、外的基準がファジィ数で与えられた場合の質的なデータの数量化方法[7] を提案しており、さらにZadeh のファジィ事象の概念に基づく数量化分析として林の数量化II類のファジィ化[8] を提案している。

本論文では、 Zadehのファジィ事象の概念に基づいて、林の数量化理論 I類からIV類[9], [10], [11] のファジィ化による統一的な拡張を検討する。すなわち、標本空間にファジィ集合が定義されているとき、そのファジィ集合の枠内での質的データの数量化分析を扱う。

2．　ファジィ事象の性質

確率理論では、事象Ａは標本空間Ωの部分集合の集合族（σ－集合体）Ｉの要素である。確率測度Ｐは測度空間（Ω、Ｉ）の上での測度である。すなわち、ＰはＩのそれぞれの要素Ａに確率Ｐ(A) を割り付ける実数値関数で

(a)　$P(A) \geq 0$　　for all A in I

(b)　$P(S) = 1$

(c)　A_i in I、　$A_i \cap A_j = \phi$　$(i \neq j)$ のとき、

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

である。

上記の定義では、事象を標本空間Ωの点（標本）の集合（通常の意味での集合）とみなしている。しかしながら、日常の経験では、事象が点の集まりであるよりも、あいまいな集合である場合に出会う。例えば、厳密に定義されない事象、" 今日はさむい日である" 、" Ｘは10にほぼ等しい" などは、下線の言葉の意味が不明確であるので、あいまいである。

簡単のために、本節では標本空間Ωはｎ次元のユークリッド空間R^n であると仮定しよう。したがって、ここで扱う確率空間は（R^n 、Ｉ、Ｐ）である。ここで、ＩはR^n でのボレル集合のσ集合体、ＰはR^n 上の確率測度である。以下、R^n の点はｘで表記しよう。

Ａ∈Ｉとすると、Ａの確率は以下で定義される。

$$P(A) = \int_A dP \qquad (1)$$

同様に事象Ａの特性関数Ｘ

$$X_A(X) = \begin{cases} 0 & : \ x \ \text{not included in A} \\ 1 & : \ x \ \text{included in A} \end{cases}$$

を用いる(1) 式は次式で表わされる。

$$P(A) = \int_{R^n} X_A(x)\, dP$$

$$= E(X_A)$$

ここでＥ（X_A）は　X_Aの期待値である。

Zadeh は　通常の集合の特性関数を拡張して、ファジィ集合を以下のように定義している[1] 。

[定義１]　　R^n でのファジィ集合Ａは帰属度関数

μ　：　$R^n \longrightarrow$　[０、１]

で定義される。ここで$\mu_A(x)$はｘがファジィ集合Ａに属する程度（帰属度）を表わす。

ファジィ集合で定義されるファジィ事象の確率測度をZadehは次のように定義している[2], [13]。

[定義２]　　（R^n , Ｉ, Ｐ）は確率空間で、ＩはR^n のボレル集合のσ－集合体、ＰはR^n 上の確率測度である。この時、Ｒ　のファジィ事象はR^n のファジィ集合Ａで表わされ、その帰属度関数μ_A はボレル可測である。

[定義３]　　帰属度関数μ　で規定されるファジィ事象Ａの確率はLebesgue-Stieltjes積分

$$P(A) = \int_{R^n} \mu_A(x)\, dP$$

$$= E(\mu_A)$$

で定義される。

上の定義を用いるとファジィ事象Ａの上の平均（ファジィ平均）及び分散（ファジィ分散）はm_A 、σ_A^2 と表記し、次のように表現できる。

$m_A = \{\int_{R^n} x \mu_A(x)\, dP\} / P(A)$

$\sigma_A^2 = \{\int_{R^n} (x - m_A)^2 \mu_A(x)\, dP\} / P(A)$

ｘの関数ｆ（ｘ）のファジィ事象Ａでの期待値は同様に

$$E_A(f(x)) = \{\int_{R^n} f(x) \mu_A(x)\, dP\} / P(A)$$

である。

事象Ａが与えられたときの事象Ｂの確率P_A（Ｂ）は

$$P_A(B) = \{\int_{R^n} \mu_B(x) \cdot \mu_A(x)\, dP\} / P(A)$$

で定義できる。

ファジィ事象に関して以下の性質が成り立つことを証明しよう。

[定理１]

$$\sigma_A^2 = E_A\{(x - m_A)^2\}$$

$$= E_A(x^2) - E_A^2(x)$$

[定理2]　(Tchebyshev の不等式)

ファジィ事象Aが与えられて、有限なファジィ平均m とファジィ分散σ をもつとき、確率変数xは任意のk＞0に対して

$$P_A(|x-m_A| \geq k\sigma_A) \leq 1/k^2$$

である。

[証 明]

$$\sigma_A^2 = \{\int_{R^n}(x-m_A)^2 \mu_A(x)\,dP\}/P(A)$$

$$= \{\int_{|x-m_A|\geq k\sigma_A}(x-m_A)^2 \mu_A(x)\,dP + \int_{|x-m_A|<k\sigma_A}(x-m_A)^2\mu_A(x)\,dP\}/P(A)$$

$$\geq \{\int_{|x-m_A|\geq k\sigma_A}(x-m_A)^2\mu_A(x)\,dP\}/P(A)$$

$$\geq \{\int_{|x-m_A|\geq k\sigma_A}\mu_A(x)\,dP\}\,k^2\cdot\sigma_A^2/P(A)$$

$$= k^2\sigma_A^2 P_A(|x-m_A|\geq k\sigma_A)$$

故に

$$P_A(|x-m_A|\geq k\sigma_A) \leq 1/k^2 \quad \blacksquare$$

ここで、ファジィ事象Aに関心のあるとき、与えられた標本$(x_1, \ldots, x_n)$、の統計量（標本平均、標本分散）を定義しよう。DeLuca & Termini [12]はファジィ集合の大きさ(Power of a fuzzy set)を標本$(x_1, \ldots, x_n)$を用いて

$$N(A) = \sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)$$

と定義している。和多田ら[8] はこの標本の大きさN（A）を用いて、与えられた標本の平均、分散を次の様に定義している。

[定義4]　ファジィ事象Aに関心のあるとき、与えられた標本$(x_1, \ldots, x_n)$の平均値m_A、分散σ_A^2 は

$$m_A = \{\sum_{\omega=1}^{n} x_\omega\,\mu_A(x_\omega)\}/N(A)$$

$$\sigma_A^2 = \{\sum_{\omega=1}^{n}(x_\omega - m_A)^2\,\mu_A(x_\omega)\}/N(A)$$

で定義される。

上記の定義を用いてファジィ群の群間変動、群内変動と全変動の関係について検討しよう。

標本x_ω（$\omega=1, \ldots, n$）が与えられており、ファジィ群A_i（$i=1, \ldots, K$）の帰属度が帰属度関数$\mu_{A_i}(x_\omega)$で定義されているとしよう。このとき全平均mとファジィ群A_iでの平均m_{A_i}とは

$$m = \{\sum_{i=1}^{K}\sum_{\omega=1}^{n} x_\omega\,\mu_{A_i}(x_\omega)\}/N$$

$$m_{A_i} = \{\sum_{\omega=1}^{n} x_\omega\,\mu_{A_i}(x_\omega)\}/N(A_i)$$

ここで、

$$N = \sum_{i=1}^{K} N(A_i)$$

全変動T、ファジィ群間変動およびファジィ群内変動Eはそれぞれ

$$T = \sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}(x_\omega - m)^2\mu_{A_i}(x_\omega)$$

$$B = \sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}(m_{A_i} - m)^2\mu_{A_i}(x_\omega)$$

$$E = \sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}(x_\omega - m_{A_i})^2\mu_{A_i}(x_\omega)$$

で定義できる。このとき次の関係が成り立つ[14]。

[定理3]　ファジィ群A_i（$i=1, \ldots, K$）が与えられたとき標本x_ω（$\omega=1, \ldots, n$）の全変動T、ファジィ群間変動Bとファジィ群内変動Eの間には

$$T = B + E$$

の関係が成り立つ。

[証 明]

$$T = \sum_{i=1}^{K}\sum_{\omega=1}^{n}(x_\omega - m)^2\mu_{A_i}(x_\omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{K}\sum_{\omega=1}^{n}(x_\omega - m_{A_i} + m_{A_i} - m)^2\mu_{A_i}(x_\omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{K}\sum_{\omega=1}^{n}\{(x_\omega - m_{A_i})^2 + 2(x_\omega - m_{A_i})(m_{A_i} - m) + (m_{A_i} - m)^2\}\mu_{A_i}(x_\omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{K}\sum_{\omega=1}^{n}(m_{A_i} - m)^2\mu_{A_i}(x_\omega) + \sum_{i=1}^{K}\sum_{\omega=1}^{n}(x_\omega - m_{A_i})^2\mu_{A_i}(x_\omega)$$

$$= B + E \quad \blacksquare$$

3. ファジィ数量化理論

林は1952年質的なデータの数量化手法[9-11]を提案している。この一連の数量化理論は構成が簡潔であるため、多くの分野で利用されている。また、林の手法は現在種々の角度から検討が加えられている。例えば、田中ら[15]は、数量化分析II類の外的基準の群が順序関係をもつとき、分析結果が群の布置の順序関係を保証するように、順序関係の拘束条件のもとで数量化II類を解くことを提案している。また、田中はデータのわずかな変化の影響を検討するために感度解析の方法を提案している[16]。

しかしながら、この数量化手法を用いて実際の問題を分析するとき、集合的な取り扱いよりもファジィ集合的な取り扱いが屢々望まれる。例えば、財務指標をもとに企業の総合指標を抽出するために多変量解析を用いることを考えよう。業種によって業態が異なり、財務指標にもその特徴が表われる。このため、総合指標を抽出するときには、同一業種の企業について分析するか、業種の影響を受けない財務指標を用いることが必要である。このような標本群の影響が考えられる場合の分析として、ダミー変数を用いる方法が提案されている。しかしながら、例えば情報産業やベンチャー企業などの分類は、製造業や非製造業のように企業を分類するほどには明確ではない。このため、情報産業やベンチャー企業などの分析では、ある企業が情報産業またはベンチャー企業と考えられる程度を考慮しなければならない。さらに、現代企業では多角化が重要な戦略であり、企業を製造業、非製造業と分類することも必ずしも容易でない。このような分析では、企業の集まりをファジィ集合とみなして処理することが必要である。

このために、林の数量化手法を拡張した、ファジィ事象に関する質的なデータの数量化分析の方法（ファジィ数量化分析I類、II類、III 類、IV類）を以下に説明する。

3．1　ファジィ数量化Ⅰ類

和多田らは、目的変量であるファジィ数を質的なファジィ帰属度の線形式で表わすファジィ数量化Ⅰ類[7]を提案している。ここでは、ファジィ事象の概念に基づくファジィ数量化Ⅰ類を構成する。

表1．　ファジィ数量化 Ⅰ類で扱うデータ

番号 ω	外的基準 y	カテゴリ $A_1 \cdots A_i \cdots A_K$	ファジィ群 B
1	y_1	$\mu_1(1) \cdots \mu_i(1) \cdots \mu_K(1)$	$\mu_B(1)$
2	y_2	$\mu_1(2) \cdots \mu_i(2) \cdots \mu_K(2)$	$\mu_B(2)$
⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
ω	y_ω	$\mu_1(\omega) \cdots \mu_i(\omega) \cdots \mu_K(\omega)$	$\mu_B(\omega)$
⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
n	y_n	$\mu_1(n) \cdots \mu_i(n) \cdots \mu_K(n)$	$\mu_B(n)$

表1はファジィ数量化Ⅰ類で扱うデータを示している。ファジィ群Bは与えられた標本のファジィ集合を表わしている。y_ω は外的基準の値であって、標本ωのとるR^1上の数値である。$\mu_i(\omega)$は標本ωが質的カテゴリi（$i=1,\ldots,K$）に反応した程度で、[0,1]上の数値である。

ここでの問題は外的基準yとカテゴリとの間の線形関係

$$y(\omega) = \sum_{i=1}^{K} a_i \mu_i(\omega) \qquad (2)$$

を決定することである。a_i はカテゴリ．ウエイトである。このとき、ファジィ群B内での(2)式の推定値$y(\omega)$と与えられた外的基準y_ωとの誤差の分散を最小にするカテゴリ．ウエイトがデータの構造を最もよく表現している。

簡単のため、次の行列記号を導入する。

$$\mathbf{y}' = [y_\omega] = [y_1, y_2, \ldots, y_n],$$

$$B = \begin{bmatrix} \mu(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mu(n) \end{bmatrix},$$

$$X = [\mu_i(\omega)] = \begin{bmatrix} \mu_1(1) & \cdots & \mu_K(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_1(\omega) & \cdots & \mu_K(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_1(n) & \cdots & \mu_K(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = [a_i] = [a_1, a_2, \ldots, a_K]$$

推定値を

$$\mathbf{Y} = X\mathbf{a}$$

と表記する。

これらの行列表現を用いると、ファジィ群Bでの誤差分散 σ_B^2 は

$$\sigma_B^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{Y})'B(\mathbf{y} - \mathbf{Y})/N(B)$$
$$= (\mathbf{y} - X\mathbf{a})'B(\mathbf{y} - X\mathbf{a})/N(B)$$

である。このため誤差分散を最小にする$\mathbf{a}$は

$$\frac{\partial \sigma_B^2}{\partial \mathbf{a}} = -2X'B\mathbf{y} + 2X'BX\mathbf{a} = 0$$

より

$$X'BX\mathbf{a} = X'B\mathbf{y}$$

ゆえに、求めるカテゴリ．ウエイトは

$$\mathbf{a} = (X'BX)^{-1}X'B\mathbf{y}$$

となる。

3．2　ファジィ数量化Ⅱ類

数量化分析Ⅱ類は外的基準が分類で与えられ、質的な判断を表わす1と0の数値からなるデータの数量化分析である。和多田らは、ファジィ事象の概念を用いる方法としてファジィ数量化分析Ⅱ類を提案している[7]。ファジィ数量化分析Ⅱ類では外的基準の分類がファジィ集合で与えられ、質的な判断が[0,1]上の値（帰属度）からなるデータを用いる。ここでは、簡単にその構成を説明する。

表2はファジィ数量化Ⅱ類で扱うデータを示している。ファジィ数量化Ⅰ類のデータと異なる部分は、ファジィ外的基準がファジィ群$B_1, \ldots, B_M$で与えられていることである。

表2．　ファジィ数量化Ⅱ類で扱うデータ

番号 ω	ファジィ外的基準 $B_1 \cdots B_M$	カテゴリ $A_1 \cdots A_i \cdots A_K$
1	$g^1(1) \cdots g^M(1)$	$\mu_1(1) \cdots \mu_i(1) \cdots \mu_K(1)$
2	$g^1(2) \cdots g^M(2)$	$\mu_1(2) \cdots \mu_i(2) \cdots \mu_K(2)$
⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
ω	$g^1(\omega) \cdots g^M(\omega)$	$\mu_1(\omega) \cdots \mu_i(\omega) \cdots \mu_K(\omega)$
⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
n	$g^1(n) \cdots g^M(n)$	$\mu_1(n) \cdots \mu_i(n) \cdots \mu_K(n)$

ここでの目的は各カテゴリA_iのカテゴリ．ウエイトa_iで表わされる線形式

$$y(\omega) = \sum_{i=1}^{K} a_i \mu_i(\omega) \qquad : \quad \omega = 1, \ldots, n \qquad (3)$$

によって標本ωを実数軸上に写像したとき、実軸上にファジィ外的基準の構造をもっともよく表わすようにカテゴリ．ウェイトa_i $(i=1,\ldots,K)$を決めることである。

線形式(3)が実軸上に外的基準の構造を最もよく表現しているかどうかを知るための基準として、ファジィ分散比η^2を導入しよう。

[定義5]　　ファジィ分散比η^2 は定理3の全変動Tとファジィ群間変動Bとの比で次のように定義される。

$$\eta^2 = B/T \qquad (4)$$

ここでの問題は式(4) のファジィ分散比 を最大にする線形式(3) のカテゴリ。ウェイトa_i を決定することである。以下定式化を行なう。

線形式の値$y(\omega)$ の各ファジィ外的基準B 内でのファジィ平均値$\bar{y}$ とファジィ平均値$\bar{y}$は次のようになる。

$$\bar{y}_{B_r} = \left(\sum_{\omega=1}^{n} y(\omega)\,\mu_{B_r}(\omega)\right)/N(B_r) \quad : r=1,\ldots,M$$

$$\bar{y} = \left(\sum_{r=1}^{M} \bar{y}_{B_r} N(B_r)\right)/N$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{M}\sum_{\omega=1}^{n} y(\omega)\,\mu_{B_r}(\omega)\right)/N$$

ファジィ．カテゴリA_i の帰属度の各ファジィ外的基準B_r 内でのファジィ平均値$\bar{\mu}_i^r$と全ファジィ外的基準でのファジィ平均値$\bar{\mu}_i$ とは次のように表わすことができる。

$$\bar{\mu}_i^r = \left(\sum_{\omega=1}^{n} \mu_i(\omega)\,\mu_{B_r}(\omega)\right)/N(B_r) \qquad (i=1,\ldots,k;\ r=1,\ldots,M)$$

$$\bar{\mu}_i = \left(\sum_{r=1}^{M} \bar{\mu}_i^r N(B_r)\right)/N$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{M}\sum_{\omega=1}^{n} \mu_i(\omega)\,\mu_{B_r}(\omega)\right)/N \qquad (i=1,\ldots,K)$$

これらを用いて、全ファジィ分散σ^2 とファジィ群間分散σ_B^2 は次のように示される。

$$\sigma^2 = \left(\sum_{r=1}^{M}\sum_{\omega=1}^{n} (y(\omega)-\bar{y})^2 \mu_{B_r}(\omega)\right)/N$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{M}\sum_{\omega=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{K}(\mu_i(\omega)-\bar{\mu}_i)\,a_i\right)^2 \mu_{B_r}(\omega)\right]/N$$

$$\sigma_B^2 = \left(\sum_{r=1}^{M} N(B_r)\,(\bar{y}_{B_r}-\bar{y})^2\right)/N$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{M}\sum_{\omega=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{K}(\bar{\mu}_i^r-\bar{\mu}_i)\,a_i\right)^2 \mu_{B_r}(\omega)\right]/N$$

ファジィ分散比η^2 を最大にする線形関数yのカテゴリ。ウェイトa_i $(i=1,\ldots,K)$ を決定するために、η^2 をa で偏微分して零とおくと、結果として次式が得られる。

$$\sum_{r=1}^{M}\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_{B_r}(\omega)\,(\bar{\mu}_i^r-\bar{\mu}_i)\,(\bar{\mu}_j^r-\bar{\mu}_j)\,a_i$$

$$= \eta^2 \sum_{r=1}^{M}\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_{B_r}(\omega)\,(\mu_i(\omega)-\bar{\mu}_i)\cdot(\mu_j(\omega)-\bar{\mu}_j)\,a_i \qquad (j=1,\ldots,K) \quad (5)$$

上式の解は、固有値問題となることを示そう。(Mn,K)行列A，$\bar{A}_G$ および$\bar{A}$を次んのように定義する。

$$A = \begin{bmatrix} \mu_1(1) & \cdots & \mu_i(1) & \cdots & \mu_K(1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_1(\omega) & \cdots & \mu_i(\omega) & \cdots & \mu_K(\omega) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_1(n) & \cdots & \mu_i(n) & \cdots & \mu_K(n) \\ \mu_1(1) & \cdots & \mu_i(1) & \cdots & \mu_K(1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_1(n) & \cdots & \mu_i(n) & \cdots & \mu_K(n) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_G = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1^1 & \cdots & \bar{\mu}_i^1 & \cdots & \bar{\mu}_K^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{\mu}_1^1 & \cdots & \bar{\mu}_i^1 & \cdots & \bar{\mu}_K^1 \\ \bar{\mu}_1^1 & \cdots & \bar{\mu}_i^1 & \cdots & \bar{\mu}_K^1 \\ \bar{\mu}_1^2 & \cdots & \bar{\mu}_i^2 & \cdots & \bar{\mu}_K^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{\mu}_1^M & \cdots & \bar{\mu}_i^M & \cdots & \bar{\mu}_K^M \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 & \cdots & \bar{\mu}_i & \cdots & \bar{\mu}_K \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{\mu}_1 & \cdots & \bar{\mu}_i & \cdots & \bar{\mu}_K \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{\mu}_1 & \cdots & \bar{\mu}_i & \cdots & \bar{\mu}_K \\ \bar{\mu}_1 & \cdots & \bar{\mu}_i & \cdots & \bar{\mu}_K \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{\mu}_1 & \cdots & \bar{\mu}_i & \cdots & \bar{\mu}_K \end{bmatrix}$$

aをK次元のカテゴリ。ウェイトの列ベクトルで

$$a' = [a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_K]$$

とする。ここで′は転置を示す。また、Bを(Mn,Mn) 対角行列

$$B = \begin{bmatrix} \mu_{B_1}(1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_{B_1}(n) & & & \\ & & & \mu_{B_2}(1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_{B_M}(n) \end{bmatrix}$$

とすると、式(5) は

$$\{B^{1/2}(\bar{A}_G-\bar{A})\}'\{B^{1/2}(\bar{A}_G-\bar{A})\}a$$

$$= \eta^2\{B^{1/2}(A-\bar{A})\}'\{B^{1/2}(A-\bar{A})\}a \qquad (6)$$

と表わすことができる。

いま、S_G、Sを(K,K) の行列で

$$S_G = \{G^{1/2}(\bar{A}_G-\bar{A})\}'\{G^{1/2}(\bar{A}_G-\bar{A})\}$$

$$S = \{G^{1/2}(A-\bar{A})\}'\{G^{1/2}(A-\bar{A})\}$$

と定義する。このS_G とSを用いると、式(6) は

$$S_G a = \eta^2 S a \qquad (7)$$

となり、Sを(K,K) の三角行列Δによつて

$$S = \Delta'\Delta$$

と分解することが可能であって、式(7) は

$$[(\Delta')^{-1} S_G \Delta^{-1}]\Delta a = \eta^2 \Delta a$$

となる。このため、分散比η^2 を最大にする線形関数fの係数を求めることは、固有値η^2 が最大となる固有ベクトルΔaを決定することである。

3．3　ファジィ数量化III 類

林の数量化III 類は、各個体ωのいくつかのカテゴリに対する反応を示す1または0のデータを用いる。カテゴリや個体を数量化することによって、個体やカテゴリを数量的に分類することを目的としている。

ファジィ数量化III 類では、個体があらかじめファジィ集合Bの要素であり、このファジィ集合Bのもとで、言い換えるとファジィ集合Bの帰属度を考慮して各個体ωおよびカテゴリを数量的に分類しようとするものである[17]。このとき、各カテゴリに対する反応は、{0,1} ではなく、[0,1] 上の値をとる帰属度で与えられており、各個人のパターンは異なると仮定しよう。特に、カテゴリに対する反応が{0,1} で与えられる場合には、パターンの頻度率を帰属度と考えよう。

表3はファジィ数量化III 類のデータを示している。各個体ωおよび各カテゴリiにそれぞれ実数値v およびu を割りあてる。このとき反応の似ている個体は互いに近い数値を与え、同時にカテゴリにも似たものには近い数値を与えることがここでの目的である。通常の場合と同様に、個体とカテゴリの相関係数をその指標として用いる。

表3．　ファジィ数量化III 類で扱うデータ

			u_1	..	u_i	..	u_K	
	番号 ω	ファジィ群 B	カテゴリ 1	..	i	..	K	計
v_1	1	$\mu_B(1)$	$\mu_1(1)$	..	$\mu_i(1)$	..	$\mu_K(1)$	m_1
v_2	2	$\mu_B(2)$	$\mu_1(2)$	..	$\mu_i(2)$	..	$\mu_K(2)$	m_2
.	.	.	.		.		.	.
.	.	.	.		.		.	.
.	.	.	.		.		.	.
v_ω	ω	$\mu_B(\omega)$	$\mu_1(\omega)$	..	$\mu_i(\omega)$	..	$\mu_K(\omega)$	m_ω
.	.	.	.		.		.	.
.	.	.	.		.		.	.
.	.	.	.		.		.	.
v_n	n	$\mu_B(n)$	$\mu_1(n)$	..	$\mu_i(n)$	..	$\mu_K(n)$	m_n

ただし、　$m_\omega = \sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)$　　：　$\omega = 1, \ldots, n$

個体ωの全カテゴリの反応の大きさは

$$m_\omega = \sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)$$

であり、ファジィ集合Bのもとでのデータ全体の反応の大きさは

$$T = \sum_{\omega=1}^{n} m_\omega \mu_B(\omega) = \sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)\mu_B(\omega)$$

である。数値u_i，v_ω ファジィ事象Bのもとでの平均$\bar{u}$，$\bar{v}$，分散σ_u^2，σ_v^2 および共分散σ_{uv}は以下のようになる。

$$\bar{u} = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)\mu_B(\omega)u_i\Big)/T$$

$$\bar{v} = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)\mu_B(\omega)v_\omega\Big)/T = \Big(\sum_{\omega=1}^{n} m_\omega \mu_B(\omega)v_\omega\Big)/T$$

$$\sigma_u^2 = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)\mu_B(\omega)(u_i-\bar{u})^2\Big)/T = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)\mu_B(\omega)u_i^2\Big)/T - \bar{u}^2$$

$$\sigma_v^2 = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)\mu_B(\omega)(v_\omega-\bar{v})^2\Big)/T = \Big(\sum_{\omega=1}^{n} m_\omega \mu_B(\omega)(v_\omega-\bar{v})^2\Big)/T = \Big(\sum_{\omega=1}^{n} m_\omega \mu_B(\omega)v_\omega^2\Big)/T - \bar{v}^2$$

$$\sigma_{uv} = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)\mu_B(\omega)(u_i-\bar{u})(v_\omega-\bar{v})\Big)/T = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega)\mu_B(\omega)u_i v_\omega\Big)/T - \bar{u}\bar{v}$$

ここでは、$\bar{u}=0$およぶい$\bar{v}=0$の条件のもとで相関係数

$$\rho = \frac{\sigma_{uv}}{\sqrt{\sigma_u^2\,\sigma_v^2}}$$

を最大にするu_iとv_ωを決定することが問題である。このため、相関係数をu_Kおよびv_τで偏微分すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_k} = 0 \qquad (k=1,\ldots,K)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v_\tau} = 0 \qquad (\tau=1,\ldots,n)$$

であり、この結果

$$\frac{\partial \sigma_{uv}}{\partial u_K} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial u_k}\right) \qquad (k=1,\ldots,K) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{uv}}{\partial v_\tau} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u}\frac{\partial \sigma_v^2}{\partial v_\tau}\right) \qquad (\tau=1,\ldots,n) \qquad (9)$$

また、

$$\frac{\partial \sigma_{uv}}{\partial u_K} = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\mu_K(\omega)\mu_B(\omega)v_\omega\Big)/T$$

$$\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial u_K} = \Big(\sum_{\omega=1}^{n}\mu_K(\omega)\mu_B(\omega)u_K\Big)2/T$$

$$\frac{\partial \sigma_{uv}}{\partial v_\tau} = \Big(\sum_{i=1}^{K}\mu_i(\tau)\mu_B(\tau)u_i\Big)/T$$

$$\frac{\partial \sigma_v^2}{\partial v_\tau} = \Big(\sum_{i=1}^{K}\mu_i(\tau)\mu_B(\tau)v_\tau\Big)2/T$$

を (8)、(9) 式に代入すると

$$\sum_{\omega=1}^{n}\mu_K(\omega)\mu_B(\omega)v_\omega = \rho\frac{\sigma_v}{\sigma_u}\sum_{\omega=1}^{n}\mu_K(\omega)\mu_B(\omega)u_K$$

$$\sum_{i=1}^{K}\mu_i(\tau)\mu_B(\tau)u_i = \rho\frac{\sigma_u}{\sigma_v}m_\tau\mu_B(\tau)v_\tau$$

となる。これからv_τを消去すると

$$\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}\frac{\mu_B(\omega)}{m_\omega}\mu_K(\omega)\mu_i(\omega)u_i = \rho^2\sum_{\tau=1}^{n}\mu_K(\tau)\mu_B(\tau)u_K \qquad (k=1,\ldots,K) \quad (10)$$

となる。(10)式を整理するために

$$b_k = \sum_{\omega=1}^{n}\mu_k(\omega)\mu_B(\omega)$$

$$z_k = \sqrt{b_k}\,u_k$$

$$c_{ki} = \frac{1}{\sqrt{b_k b_i}}\sum_{\omega=1}^{n}\frac{\mu_B(\omega)}{m_\omega}\mu_k(\omega)\mu_i(\omega) \qquad (k,i=1,\ldots,K)$$

とおくと、

$$\sum_{i=1}^{K} c_{ki} z_i = \rho^2 z_k \qquad (k=1,\ldots,k)$$

を得る。ここで、次の行列表現

$$C = [c_{ki}]$$

$$Z = [z_1, \ldots, z_K]$$

を用いると、

$$CZ = \rho^2 Z$$

となる。すなわち、$\bar{u}=0$, $\bar{v}=0$の条件のもとで固有方程式の最大固有値をとればよい。またv_τは

$$\frac{1}{\rho}\frac{\sigma_u}{\sigma_v} = 1$$

のもとで解くと、

$$v_\tau = \{\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\tau)\, u_i\} / m_\tau$$

である。

3．4 ファジィ数量化IV類

林の数量化IV類はn個の個体相互の親近性を表わす数量e_{ij} $(i, j=1,\ldots,n)$をデータとする。各個体iに数値x_iを与えたとき、個体i, j間の距離と親近性e_{ij}とが単調な関係になるように数値x_iをきめる。すなわち親近性データe_{ij}をもっともよく実現する個体i $(i=1,\ldots,n)$の1次元布置を決定している。

表4.　　ファジィ数量化IV類で扱うデータ

			個体				
			1	..	i	..	n
		ファジィ群 B	$\mu_B(1)$	..	$\mu_B(i)$	..	$\mu_B(n)$
個体	1	$\mu_B(1)$	e_{11}	..	e_{1i}	..	e_{1n}
	.	.	.		.		.
	.	.	.		.		.
	.	.	.		.		.
	i	$\mu_B(i)$	e_{i1}	..	e_{ii}	..	e_{in}
	.	.	.		.		.
	.	.	.		.		.
	.	.	.		.		.
	n	$\mu_B(n)$	e_{n1}	..	e_{ni}	..	e_{nn}

ファジィ数量化IV類では個体はファジィ群Aに属しており、ファジィ群Aの内で上記関係を決定することが同題である。言い換えると、ファジィ群Aに属する程度が少ないときその個体の影響はあまり考慮しない。しかし、帰属度が高い個体の単調関係に対する影響を十分考慮するように数値x_iを決定することである。

個体に与えた未知の数値x_i $(i=1,\ldots,n)$と親近性e_{ij}とで表わされる量Q

$$Q = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_B(i)\, \mu_B(j)\, e_{ij} (x_i - x_j)^2$$

を考えよう。このQを最大にする1次元布置x_i $(i=1,\ldots,n)$を決定することが同題である。原点の位置および尺度は影響しないので、便宜のため

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(i)\, x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = c$$

の条件のもとでQを最大にする布置x_iを決定する。ラグランジェの未定乗数法を用いて

$$G = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\, \mu_B(i)\, \mu_B(j)\, (x_i - x_j)^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - c\right)$$

として、

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} = 0 \qquad (k=1,\ldots,n)$$

を解くと

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} = -2\sum_{j=1}^{n} e_{kj}\, \mu_B(k)\, \mu_B(j)\, (x_k - x_j) + 2\sum_{j=1}^{n} e_{jk}\, \mu_B(k)\, \mu_B(j)\, (x_j - x_k) - 2\lambda x_k = 0 \qquad (k=1,\ldots,n)$$

となる。すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_B(k)\, \mu_B(i)\, (e_{ki} + e_{ik})\, (x_i - x_k) = \lambda x_k$$

と書ける。このとき

$$a_{ki} = (e_{ki} + e_{ik})\, \mu_B(k)\, \mu_B(i)$$

とおけば

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} (x_i - x_k) = \lambda x_k$$

となる。したがって、行列表記

$$h_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & (i \neq j) \\ -\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} a_{ik} & (i = j) \end{cases}$$

$$X' = [x_1, \ldots, x_n]$$

$$H = [h_{ij}]$$

とおくと

$$HX = \lambda X$$

となる。すなわち、

$$Q = X'HX = \lambda X'X = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda c$$

に注意すると、$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = c$の条件のもとでQを最大にするx_iは、Hの最大固有値に対応する固有ベクトルとなる。

参考文献

[1] L.A.Zadeh, FuzzySets, Informationand Control, 8, pp338-353, (1965)

[2] L.A.Zadeh, Probability Measures of Fuzzy Events, J. of Mathematical Analysis and Applications, 23, pp421-427 (1968)

[3] K.Hirota, Concepts of Probabilistic Sets, Fuzzy Sets and Systems, 5, pp31-46 (1981)

[4] H.Kwakernaak, Fuzzy Random Variables - I., Information Sci., 15, pp1-29 (1978)

[5] H.Kwakernaak, Fuzzy Random Variables - II., Information Sci., 15, pp1-29 (1978)

[6] 田中、上嶋、浅居、ファジィ関数による線形回帰モデル、日本オペレーションズリサーチ学会論文誌、25,2, pp162-174 (1982)

[7] 和多田、田中、浅居、ファジィ数量化理論Ⅰ類、行動計量学、第11巻、1号、pp66-73 (1984)

[8] 和多田、田中、浅居、ファジィ数量化理論II類、行動計量学、第9巻、2号、pp24-32 (1982)

[9] C.Hayashi, On the Prediction of Phenomena from Qualitative Data and the Quantification of Qualitative Data from the Mathematico-Statistical point of View, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 3, pp69-98 (1952)

[10] 林知己夫、数量化の方法、東洋経済新報社 (1972)

[11] 河口至商、多変量解析入門Ⅰ, II, 森北出版(1973, 1978)

[12] A.DeLuca and S.Termini, A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory, Inf. Control, 20, pp301-312 (1972)

[13] 浅居、田中、奥田、Negoita, Raiescu 、あいまいシステム理論入門、オーム社(1978)

[14] J.Watada, K.S.Fu and J.T.P.Yao, Damage Assessment Using Fuzzy Multivariant Analysis, Technical Report No CE-STR-84-4, School of Civil Eng. Purdue University (1984)

[15] Y.Tanaka, An Application of Methods of Quantification to Analyze the Effects of Qualitative Factors, In: K.Matusita, Ed, Recent Developments in Statistical Inference and Data Analysis, North-Holland, Amsterdam, (1980)

[16] 田中豊、数量化法における感度分析、数理科学、No 245, pp32-37, (1983)

[17] 和多田、田中、浅居、ファジィ数量化理論、第8回行動計量学会大会発表論文抄録集、pp71-74, 1980 年9月4日－6日

[18] M.Mizumoto, K.Tanaka, Some Properties of Fuzzy Sets of Type II, Information & Control, 31, pp312-340 (1976)

[19] M.Mizumoto, K.Tanaka, Some Properties of Fuzzy Numbers, Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications ed. by Gupta et al, pp153-164 (1979)

Fuzzy Clustering and Robust Estimation

Yasuo Ōhashi, Univ. Tokyo Hospital

Abstract

A modified version of the fuzzy k-means clustering is proposed for getting the robustness (the resistance) against a few outliers. Some numerical examples are presented for illustrating the intuitively appropriate interpretation the modified method provides, and it is pointed out that the estimator of the typical value (the population mean) obtained in one-cluster case is equivalent to a kind of M-estimator.

1. Introduction

The fuzzy clustering is a method of data analysis and pattern recognition which allocates a set of observations to clusters in a "fuzzy" way, more formally, constructs a membership-function matrix whose (i, j)-th element represents "the degree of belonging" of the ith observation to the jth cluster.

A pioneering application of the concept of fuzzy sets to cluster analysis was made by E. Ruspini in 1969. Since the fuzzy k-means clustering algorithm was proposed by J. C. Bezdek and J. C. Dunn, the theory of fuzzy clustering has developed rapidly and the potential of the fuzzy clustering for a wide range of applications has been suggested (Bezdek (1981), Kandel (1982)).

The fuzzy k-means clustering is an optimizing technique of an appropriately chosen functional and is a direct generalization of the k-means clustering. In this paper, a modified version of the fuzzy k-means clustering is proposed for getting the robustness or the resistance against a few outliers, and its relation to robust estimation is suggested (Section 2). Some numerical examples are presented, and the comparison is made with the maximum likelihood solution for the normal mixture problem (Section 3). The fuzzy k-means clustering and the proposed modified version can be easily implemented in SAS MATRIX procednre, and a good initial solution is provided by SAS FASTCLUS. An example of the program is given in Appendix.

2. Fuzzy k-means clustering and a modification

2.1 Fuzzy k-means clustering

Let $X = (\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \cdots, \underset{\sim}{x}_n)'$ be a $n \times p$ data matrix where $\underset{\sim}{x}_i$ is the p dimensional vector representing the coordinates of the ith observation, and let $U = (u_{ij})$ be a $n \times k$ membership matrix whose elements satisfy the following conditions:

$$u_{ij} \in [0, 1] \qquad \forall_{i,j}, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} u_{ij} = 1 \qquad \forall_i, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ij} > 0 \qquad \forall_j. \tag{3}$$

A k-tuple $(u_{i1}, \cdots, u_{ik})$ represents the melberships of the ith observation where u_{ij} can be interpretated as the degree of belonging of the ith observation to the jth cluster.

The fuzzy clustering is a mapping from the set of data matrices to the set of membership matrices, and if the restriction

$$u_{ij} = 1 \text{ or } 0 \tag{4}$$

is added to (1)~(3), the resulting solution reduces to the usual partitioning of n observations to k clusters (hard clustering).

The easiest-to-implement technique of the fuzzy clustering is the objective functional clustering which minimizes the appropriately chose functional

$$J = J(U, X, \text{some parameters}),$$

and the technique is regarded as a generalization of its hard version such as k-means clustering (ISODATA) and Friedman and Rubin's method (see, for example, Everitt (1974)). The fuzzy k-means clustering (Bezdek (1981), Chap. 3) is a direct generalization of the k-means clustering, and adopts as the functional the least squares error criterion

$$J(U, X, V) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (u_{ij})^m d(\underset{\sim}{x}_i, \underset{\sim}{v}_j)^2 \tag{5}$$

where $V = (\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \cdots, \underset{\sim}{v}_k)$ is the set of the "typical value" vectors of the clusters, $d(\underset{\sim}{x}_i, \underset{\sim}{v}_j) = \|\underset{\sim}{x}_i - \underset{\sim}{v}_j\|$ is an arbitrary inner product norm (usually Enclidean distance) and m is the tuning constant which determines the vagueness (fuzziness) of the solution.

When $m = 1$, the solution of

$$J(U, X, V) \rightarrow \min \tag{6}$$

reduces to that of the hard k-means clustering, and as m approaches to infinity, the solution approaches to the most vague status

$$U = \begin{bmatrix} 1/k & \cdots & 1/k \\ \vdots & & \vdots \\ 1/k & \cdots & 1/k \end{bmatrix}$$

$m = 2$ is recommended by several authors.

The solution of (6) is obtained by Picard iteration of the following equations:

$$u_{ij} \propto (1/d_{ij})^{2/(m-1)} \text{ where } d_{ij}^2 = d(\underset{\sim}{x}_i, \underset{\sim}{v}_j)^2, \tag{7}$$

$$\underset{\sim}{v}_j = \sum_{i=1}^{n} (u_{ij})^m \underset{\sim}{x}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} (u_{ij})^m, \tag{8}$$

and the convergence property of the process is discusesed in Bezdek (1981) Chap. 3.

2.2 A modification

The fuzzy k-means clustering provides an intuitively appropriate solution for the data consisting of some well separated clusters and "intermediate" observations (see Exhibit 1.1) or partly overlapping clusters. But for the data with possible outliers (outlying clusters), the estimates of the typical values are greatly influenced and the technique often fails to detect the "natural" structure (see Exhibit 1.

This paper was presented at the 9th SUGI (SAS Users Group International) meeting held in March 18-21, 1984, at the Diplomat Hotel, Hollywood Beach, Florida.

Exhibit 1.1.

Exhibit 1.2.

2). One way for overcoming the deficiency is to modify the objective functional and to make the technique robust (resistant) for the existence of a few outliers. The modified functional proposed in this paper is

$$J^*(U,X,V)=\alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(u_{ij})^m d(x_i,v_j)^2+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}(u_i^*)^m, \quad (9)$$

where u_i^* represents the discordancy (the degree of isolation) of the ith observation, and the parameter α should be determined by the accuracy of data (see later). Corresponding to the above modification the conditioning equations (1)~(3) and modified to

$$u_{ij},\ u_i^* \in [0,1]\ \forall_{i,j}, \quad (1)'$$

$$\sum_{j=1}^{k} u_{ij}+u_i^*=1\ \forall_i, \quad (2)'$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ij}>0\ \forall_j, \quad (3)'$$

When $\alpha=0$, any hard partition is the solution of

$$J^*(U,X,V)\rightarrow \min, \quad (6)'$$

and when $\alpha=1$, any observation becomes an cluster isolated by itself. It is easy to verify that the solution of (6)' is obtained by Picard iteration of

$$u_{ij}\propto(1/d_{ij})^{2/(m-1)},\ u_i^*\propto(\alpha/(1-\alpha))^{1/(m-1)}, \quad (7)'$$

$$\underset{\sim}{v}_j=\sum_{i=1}^{n}(u_{ij})^m \underset{\sim}{x}_i/\sum_{i=1}^{n}(u_{ij})^m, \quad (8)'$$

and following the discussion of Bezdek (1981) Chap. 3, it is proved that the iterative solution converges to a strict local minimum or the limit of every convergent subsequence of Picard iteration is a strict local minimum of (6)'.

Just as the other nonlinear optimizing techniques, it is not assured that the solution of the iterative process is a global minimum of (6)', and in order to increase the probability of reaching the global solution as well as to decrease the number of cycles, a "good" initial soution should be adopted. SAS provides a very rapid clustering technique FASTCLUS which is a combination of the efficient initialization technique (inspired by Hartigan's leader algorithm) and the k-means clustering.

Some experiments show that FASTCLUS provides a good initial solution for the (modified) fuzzy k-means clustering and the inspection of the results of FASTCLUS and the modified fuzzy clustering seems to be a useful technique for data investigation, especially, multivariate outlier detection.

2.3 Relation to robust estimation and selection of α

When $k=1$ (one-cluster case), the typical value $\underset{\sim}{v}$ is the iteratively adjusted weighted mean with the weight function

$$\omega(\underset{\sim}{x}_i,\underset{\sim}{v})=u_i^m=\{1+(\alpha/(1-\alpha)d(\underset{\sim}{x}_i,\underset{\sim}{v})^2\}^{-\frac{m}{m-1}}, \quad (9)$$

and $\underset{\sim}{v}$ is regarded as a maximum likelihood type robust estimator (M-estimator; see, for example, Huber (1981)) of the *location* parameter $\underset{\sim}{u}$. The derivative of the log-likelihood corresponding to (9) is

$$\phi(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{u})=\omega(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})B(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{u}), \quad (10)$$

where B is an arbitrary $p\times p$ constant matrix, and when $m=2$ and $d(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v})=(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{v})'A(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{v})$ (in the following, we assume these conditions), the M-estimator corresponds to the maximum likelihood estimator (MLE) for the multivariate t distribution with the log-likelihood

$$-\log f(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{u})\propto\log(1+(\alpha/(1-\alpha)(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{u})'A(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{u})). \quad (11)$$

The MLE for multivariate t ditsribution (Marrona (1976), Devlin, et al. (1981), Ohashi (1984)) is known to be efficient enough for the normal sample and fully resistant against outliers, if the corresponding degrees of freedom (d. f.) is appropriately chosen, and the proposed method is expected to possess the above desirable properties not only for one-cluster case but also for multiple-cluster case.

The parameter α should be determined by a rough estimate of within-cluster variation and the outlier proneness of the distribution. The relation between the parameters of the multivariate t distribution and α is given by

$$\alpha/(1-\alpha)=(\nu\tau^2)^{-1}, \quad (12)$$

where τ is the scale parameter and ν is d. f.. If we scale the t distribution so that it has the same inter-quartile range as the standard normal distribution $N(0,1^2)$, the relation between α and the d. f. of the M-estimator ν is given by Exhibit 2. In the real

Exhibit 2. Relation between ν and α

ν	α
1	.69
2	.42
3	.30
5	.19
20	.049
40	.025
80	.012

applications, the d. f. parameter ν should be at first determined, taking account of the outlier proneness of data. The smaller ν is, the more resistant the proceduce becomes. Then a rough estimate of the scale parameter $\hat{\tau}$ (note that the population scale parameters such as the inter-quartile range vary according to d. f.) and ν determine the appropriate α by

$$\alpha=(\nu\hat{\tau}^2+1)^{-1}. \quad (12)'$$

The small change of α dose not affect the clustering results so much and the selection of α (the estimation of τ) would not be worried about too seriously. Practically, the sensitivity check by changing α is recommended.

2.4 Properties of the modified method

Exhibit 3 shows the membership u_{ij} and the discordancy u_i^* calculated from the artificial data ($k = 2, \alpha = .20, A = I$). The modified robust fuzzy k-means clustering seems to provide the intuitively appropriate interpretation ; that is

(1) two separated clusters are correctly identified.

(2) the value of the discordancy u_i^* is nearly one for outlying observations, and it increases as the observation diverges from the "centers" of the clusters.

(3) the intermediate observations are classified almost equally into two clusters, but the distances from the "centers" of the clusters are large as compared with τ, those observations are identified as outliers with high u^* values.

Exhibit 3.1. Example 1

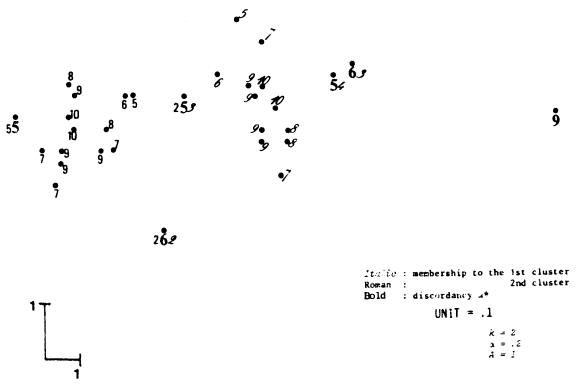


Exhibit 3.2. Example 2

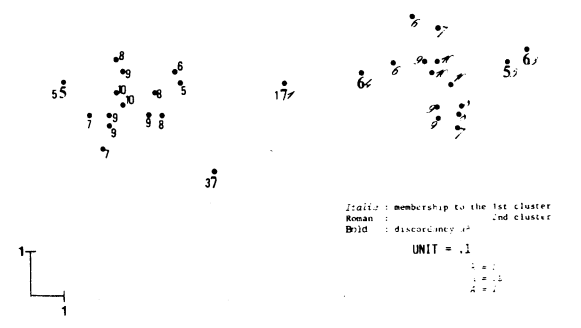


Exhibit 5 is the sensitivity curve of the typical value v and Exhibit 6 shows the stem-leaf displays of $u_i(k=1, A=I)$. They are calculated from the data shown in Exhibit 4 which consists of 19 artificial observations and one reference value indicated by X (cross).

One difficult problem in the application of (fuzzy and hard) k-means clustering is the determination of the number of clusters k. Many criteria which measure the validity of clustering results and the decision rules based on those measures have been proposed (see, for example, Bezdek (1981), Chap. 4) For the modified method, the construction of the validity measure and formal decision rule is a future problem. Informally, several runs with different k values with

Exhibit 4. Sample points for sensitivity analysis

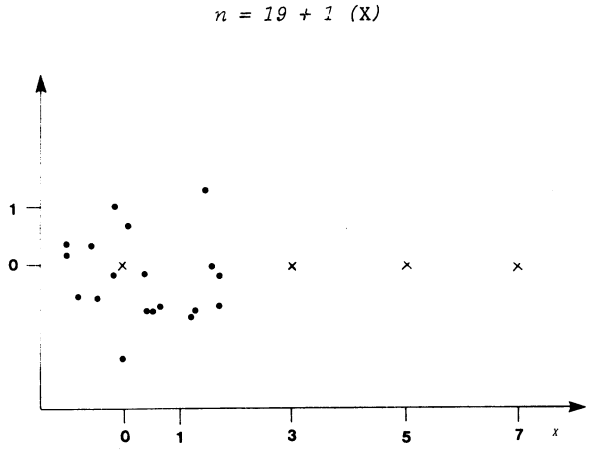
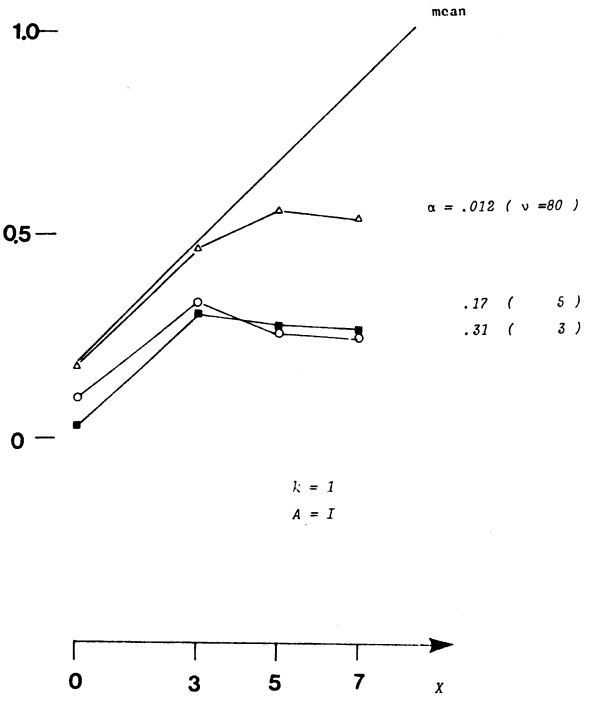


Exhibit 5. Sensitivity curve for v (typical value)



the inspection of the distribution of u_{ij} are recommended. Exhibit 7 shows the result for $k = 1$ and $k = 2$ ($\alpha = .31, A = I$) calculated from the data in Exhibit 4 with $X = 7$. The values of u_{i2} for $k = 2$ are almost 0 except the last observation (X). Generally, if k is overestimated, the values of u_{ij} for some j are almost zero except some outliers, so the inspection of the distribution of u_{ij} would lead to the proper selection of k.

Exhibit 6. Stem-Leaf display of u_i

α	stem	$X=0$	$X=3$	$X=5$
	10			
	9	1*3*9	1038	1238
	8	688	5	5
	7	8	113	114
.31	6	44577	0003	002
(ν =3)	5	013345	446	4569
	4	9	599	589
	3	5	5	5
	2		*4*	
	1			
	0			*9*

UNIT= .01

α	stem	$X=0$	$X=3$	$X=5$
	100	0	0	
	99	05567*8*	• 4557	0035579
	98	135579	2357888	015578
	97	224688	11689	055
	96		07	338
	95	7		
.012	94			
(ν =80)	93			
	92		*8*	
	91			
	90			
	89			
	88			
	87			
	86			
	85			
	84			
	83			
	82			
	81			
	80			*6*

UNIT= .001

k = 1, A = I

italic : u_i *of X*

Exhibit 7. Effects of misspecification of k

X = 7 (See Exhibit 4)

cluster 1 u_1	cluster 2 u_2	discordancy u^*
98 *98*	00	01 *02*
90 *93*	01	10 *07*
90 *92*	01	10 *08*
88 *91*	01	11 *09*
88 *85*	00	11 *15*
76 *74*	01	23 *26*
66 *71*	02	32 *29*
66 *71*	02	32 *29*
63 *62*	02	35 *38*
63 *60*	01	36 *40*
62 *60*	01	36 *40*
54 *59*	03	42 *41*
53 *55*	02	45 *45*
51 *55*	04	46 *45*
51 *49*	02	47 *51*
49 *54*	04	47 *46*
49 *48*	02	48 *52*
47 *45*	02	52 *55*
33 *35*	04	63 *65*
0 *05*	100	0 *95*

UNIT= .01

Italic : *k=1*
Roman : *k=2*

α = .31, A = I

3. Mixture problem

The resemblance of the fuzzy k-means clustering to the maximum likelihood estimation procedure for the normal mixture problem is pointed out in Bezdek (1981), Chap. 6. Day (1969) investigated the maximum likelihood estimation for the two component normal mixture distribution

$$q f(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}_1, \Sigma) + (1-q) f(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{u}_2, \Sigma) \tag{13}$$

where $f(\cdot;\, \underset{\sim}{u}, \Sigma)$ is the density function of the (multivariate) normal distribution with mean $\underset{\sim}{u}$ and dispersion matrix Σ, and q is the mixture proportion. For the simplicity and making the situations comparable with ours, suppose that $\Sigma = I$ is known. Then the MLE of $\underset{\sim}{u}$'s and q are obtained by Picard iteration of the following equations:

$$q(1|\underset{\sim}{x}_i) = \frac{\hat{q} f(\underset{\sim}{x}_i; \hat{\underset{\sim}{u}}_1, I)}{\hat{q} f(\underset{\sim}{x}_i; \hat{u}_1, I) + (1-\hat{q}) f(\underset{\sim}{x}_i; \hat{v}_2, I)}, \tag{14}$$

$$\hat{\underset{\sim}{u}}_1 = \sum_{i=1}^{n} q(1|\underset{\sim}{x}_i)\underset{\sim}{x}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} q(1|\underset{\sim}{x}_i), \tag{15}$$

$$\hat{q} = \sum_{i=1}^{n} q(1|\underset{\sim}{x}_i)/n, \tag{16}$$

The similarity of these expressions to those of the fuzzy k-means clustering ((7), (8)) is obvious.

The MLE under normality is known to be very sensitive to outliers and non-robust. Exhibit 8 shows the summary of the simulation experiment conducted in order to assess the robustness of the MLE. In the experiment, three models (distributions) with different outlier-proneness are examined;

$X_1, \cdots, X_{20} \sim N(-1, 1^2)$,

$Y_1, \cdots, Y_{19} \sim N(1, 1^2)$,

Model 0: $Y_{20} \sim N(1, 1^2)$ (null situation),

Model 3: $Y_{20} \sim N(0, 3^2)$,

Model 5: $Y_{20} \sim N(0, 5^2)$.

As is obvious from Exhibit 8, the MLE is very sensitive for the existence of *one* outlier, and the mean square errors (MSEs) increases catastrophically, while the MSEs of v calculated from the modified k-means fuzzy clustering ($p = 2, \alpha = .31, A = I$) are stable. Exhibit 9 shows the distribution of the MLE and v. The distribution of v is almost normal irrespective of the models, but those of the MLE for Model 3 and 5 are strongly skewed, which explaines the high MSEs of the MLE.

Several authors (for example, Marriott (1975) and Bryant and Williamson (1978)) have pointed out that for the mixture distribution the estimation after the hard (k-means or other maximum likelihood type) clustering is inconsistant and Day's approach is preferred. But in the real application, Day's approach should be applied after the thorough investigation of the data, especially the close detection of outliers, and some robust alternatives such as the modified fuzzy clustering proposed here would be promising.

Exhibit 8. Comparison of fuzzy clustering and MLE for normal mixture distribution

		Model 0 mean	Model 0 MSE	Model 3 mean	Model 3 MSE	Model 5 mean	Model 5 MSE
Fuzzy $k=2$ $\alpha=.31$ $A=I$	$\hat{\mu}_1$	-1.11	.09	-1.11	.11	-1.12	.15
	$\hat{\mu}_2$	1.04	.10	1.12	.11	1.09	.13
		(.03)	(.01)	(.03)	(.02)	(.03)	(.02)
MLE	$\hat{\mu}_1$	-1.04	.11	-1.16	.48	-1.7	6
	$\hat{\mu}_2$	1.01	.15	1.09	.25	1.8	7
		(.03)	(.02)	(.07)			

Iteration = 100

Figure in the parenthesis is standard error

4. Discussion

The modified fuzzy k-means clustering proposed in this paper requires a rough estimate of within-cluster variation. The adaptive method without it is now under study, which would extend the applicability of the modified robust method. The approach of Art et al. (1982) adopted in SAS ACECLUS might probably be promising. As is pointed out in Section 2, the construction of the measure of the validity is also under study. Some entropy-like measures might be promising.

Gustafson and Kessel (1979) proposed a modification of the fuzzy k-means clustering which has ability of detecting the clusters with different shapes. A robust modification of their method is an attractive subject.

Acknowledgements

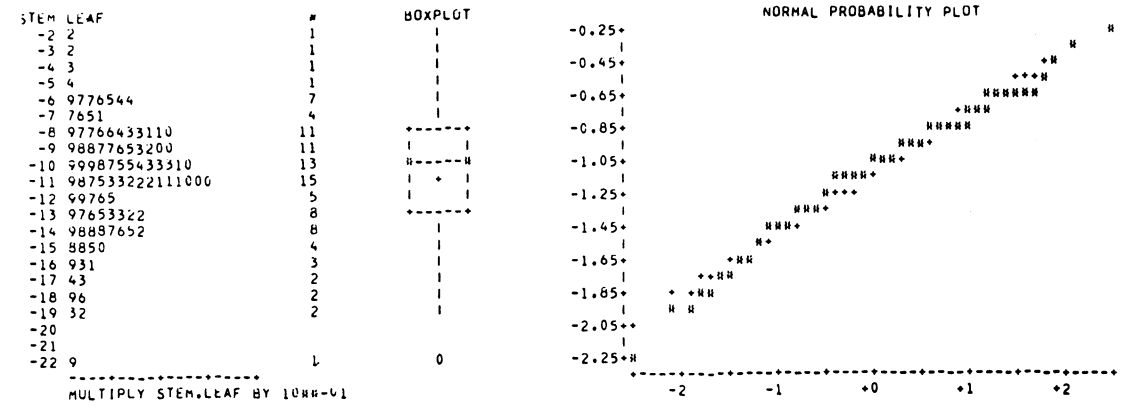
The author would like to thank Dr. Warren S. Sarle in SAS Inc. for telling him the work of Art et al. (1982).

Contact author:

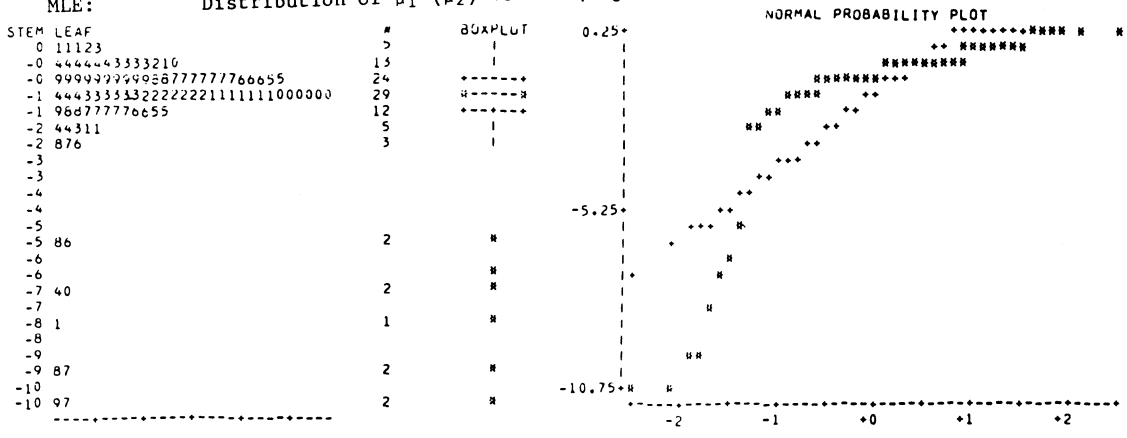
Dr. Yasuo Ohashi
University Hospital Computer Center
University of Tokyo Hospital
7 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, JAPAN

Exhibit 9. Distribution of $\hat{\mu}_1$

Fuzzy: $k=2$, $\alpha=.31$, $A=I$



MLE: Distribution of $\hat{\mu}_1$ ($\hat{\mu}_2$) is left(right)-skewed.



REFERENCES

Art D., Gnanadesikan, R. and Kettenring, J. R. (1982), Data-based metrices for cluster analysis, *Utilitas Mathematica*, 21A, 75-99.

Bezdek, J. C. (1981), *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, Plenum Press.

Bryant, P. and Williamson, J. A. (1978), Asymptotic behaviour of classification maximum likelihood estimates, *Biometrika, 65*, 273-281.

Day N. E. (1969), Estimating the components of a mixture of normal distributions, *Biometrika, 56*, 463-474.

Devlin, S. J., Gnanadesika, R. and Kettenring, J. R. (1981), Robust estimation of dispersion matrices and principal components, *J. Amer. Stat. Assoc., 76*, 354-362.

Everitt, B. S. (1974), *Cluster Analysis*, Heinemann Press.

Gustafson, D. E. and Kessel, W. (1979), Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix, IN : *Proc. IEEE-CDC*, 2(edited by K. S. Fu), 761-766, IEEE Press.

Huber, P. (1981), *Robust Statistics*, Wiley.

Kandel, A. (1982), *Fuzzy Techniques in Pattern Recognition*, Wiley.

Marriott, F. H. C. (1975, Separating mixtures of normal distributions, *Biometrics, 31*, 767-769.

Marrona, R. A. (1976), Robust M-estimators of multivariate location and scatter, *Annals of Statistics, 4*, 51-67.

Ohashi, Y. (1984), Detection of multivarite outliers in survey data, *Research on Socio-Economic Aspects of Energy System*, Reports of Special Project Research on Energy (SPEY 4) under Grant in Aid of Scientific Research of the Ministry of Education Science and Culture Japan.

APPENDIX

SAS-MATRIX program for the robust fuzzy k-means clustering.

```
*++++++++++++++++++++++++++++++++++++
+ ROBUST FUZZY CLUSTERING            +
+          1983 JULY Y.OHASHI        +
+                                    +
+    PARAMETERS WHICH SHOULD BE      +
+      SPECIFIED BY USER ARE:        +
+ _DATAO_,_NUM_,_RADIUS_,_MM_,_ALP_ +
+ _DATAO_   : DATASET FOR ANALYSIS   +
+ _NUM_     : NUMBER OF CLUSTERS     +
+ _RADIUS_  : RADIUS FOR FASTCLUS    +
+ _MM_      : PARAMETER M            +
+ _ALP_     : PARAMETER ALPHA        +
++++++++++++++++++++++++++++++++++++;
PROC FASTCLUS DATA=_DATAO_ MAXC=_NUM_
    OUT=OUT RADIUS=_RADIUS_ DRIFT LIST;
PROC MATRIX;
   FETCH D DATA=OUT;
   _MM_1=_MM_-(1); _MM_2=1#/_MM_1;
   N=NROW(D); P=NCOL(D)-(2); P1=P+(1);
   U0=DESIGN(D( ,P1))||J(N,1,0);
   D=D( ,1:P);
   K=NCOL(U0); K1=K-(1);
   U1=J(N,K,1); V=J(K1,P,1); DIST=J(N,K,1);
                  * INITIALIZATION ;
   ITEMAX=50;
* ITERATION START   ;
   DO ITE=1 TO ITEMAX
        WHILE ( ANY(ABS(U1-U0) >= 0.01));
     U1=U0;
     DO JJ=1 TO K1;;
       UJ=U1(,JJ)##_MM_;
       SS=SUM(UJ);
       V(JJ,)=((DIAG(UJ)*D)(+,))#/SS;
       DIST(,JJ)=((D-J(N,1,1)*V(JJ,))##2)(,+);
     END;
     DIST( ,K)=((1)-_ALP_)#/_ALP_;
     DIST=DIST<>(.0001);
     DIST=DIST##(-_MM_2);
     DISTSUM=DIST( ,+);
     U0=INV(DIAG(DISTSUM))*DIST;
  END;
* ITERATION STOP  ;
   NOTE FINAL MEMBERSHIP;
   PRINT U1;
   NOTE NUMBER OF ITERATION;
   PRINT ITE;
   NOTE CENTER OF CLUSTERS;
   PRINT V;
   U1=U1<>(J(N,K,.00001));
   ENTROPY=(-U1#LOG(U1))(+,+);
   NOTE ENTROPY;
   PRINT ENTROPY;
RUN;
```

T-ノルムとFuzzy制御

水本雅晴
(大阪電気通信大学)

今までに知られているT-normを紹介し，比較する．さらに，2，3のT-normを新しく定義する．また，T-normをfuzzy制御規則の演算とした時のfuzzy制御結果を示す。
なお，T-normの双対な演算としてT-conormがあるが紙面の都合上省略する。

1. T-ノルム

T-norm (triangular norm) Tは

$$T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

なる関数で，次の条件を満たすものである。

(i) $T(x,1)=x$ (単位元の存在)
(ii) $x_1\leqq x_2$ ならば $T(x_1,y)\leqq T(x_2,y)$ (単調性)
(iii) $T(x,y)=T(y,x)$ (交換性)
(iv) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$ (結合性)

このt-norm Tに双対な演算としてt-conorm Sがある。

$$S(x,y)=1-T(1-x,1-y)$$

t-norm Tは$[0,1]$において単位元1および零元0をもつ可換半群をなす(Sは双対)。

t-norm Tが<u>Archimedian t-norm</u>と呼ばれるのは次のような関数f(<u>生成関数</u>と名付ける)によって生成される場合である。

$f:[0,1]\to[0,\infty]$, $f(1)=0$ なる関数で連続・減少関数である。

$$T(x,y)=f^{(-1)}(f(x)+f(y))$$

ここで，$f^{(-1)}$はfの準逆関数で

$$f^{(-1)}(y)=\begin{cases}f^{-1}(y) & \cdots y\in[0,f(0)]\\ 0 & \cdots y\in[f(0),\infty]\end{cases}$$

さらに，Tが<u>厳密</u>と呼ばれるのは

$$T:\text{厳密}\iff f(0)=\infty$$

Tが厳密でない場合，

$$f(0)=1$$

となる生成関数fを<u>正規型生成関数</u>と呼ぶ。

(注) $f(0)\neq\infty$ なる生成関数fは正規化することにより $f(0)=1$ なる正規型生成関数に還元できることが知られている。

t-normの一例を，その生成関数と示すと以下のようになる。但し，(1)と(6)はarchimedian t-normでない。

(1) $x\wedge y=\min\{x,y\}$ 【論理積】

$$f(x)=\begin{cases}1 & \cdots x=0\\ 0 & \cdots x>0\end{cases}\quad(\text{hard不定})$$

(2) $x\boxdot y=\dfrac{xy}{x+y-xy}$ 【ハマー積】

~~$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$~~ $\quad f(x)=\dfrac{1-x}{x}$

(3) $x\cdot y=xy$ 【代数積】

$$f(x)=-\log x$$

(4) $x \,1{\cdot}1\, y = \dfrac{xy}{1+(1-x)(1-y)}$ 【アインシュタイン積】

$$f(x) = \log \frac{2-x}{x}$$

(5) $x \odot y = 0 \vee (x+y-1)$ 【限界積】

$$f(x) = 1-x \text{（否定）}$$

(6)

$$x \wedge y = \begin{cases} x & \cdots y=1 \\ y & \cdots x=1 \\ 0 & \cdots x, y<1 \end{cases}$$ 【激烈積】

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \cdots x<1 \\ 0 & \cdots x=1 \end{cases} \text{（soft 否定）}$$

以上，6つの演算の大小関係を示すと図1のようになる。これより，激烈積∧が一番小さく，論理積が一番大きいことが分る。

次に，新しくT-normを二，三定義すると以下のようになる。これらはいづれも三角関数を生成関数として採用したものである。

(7) $x \,\hat{\wedge}\, y$

$$= \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}x + \cos\frac{\pi}{2}y\right) \wedge 1\right]$$

$$f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$$

$$x \wedge y \leqq x \,\hat{\wedge}\, y \leqq x \odot y$$

(8) $x \,\hat{\wedge}\, y$

$$= \frac{2}{\pi}\cot^{-1}\left[\cot\frac{\pi}{2}x + \cot\frac{\pi}{2}y\right]$$

$$f(x) = \cot\frac{\pi}{2}x$$

$$x \cdot y \leqq x \,\hat{\wedge}\, y \leqq x \boxdot y$$

(9) $x \,\hat{\wedge}\, y$

$$= \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2}x + \sin\frac{\pi}{2}y - 1\right) \vee 0\right]$$

$$f(x) = 1 - \sin\frac{\pi}{2}x$$

$$x \odot y \leqq x \,\hat{\wedge}\, y \leqq x \wedge y$$

（但し，$\hat{\wedge} \neq 1{\cdot}1, \cdot, \boxdot$）

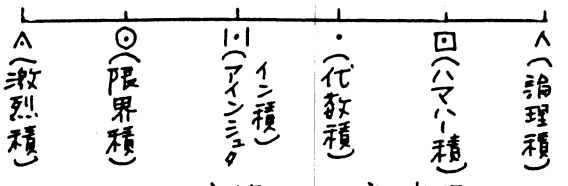


図1 演算の順序関係

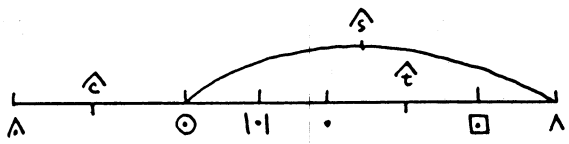


図2 新しい演算の順序関係

以上，新しく提案した3つの演算の順序関係を図示すると図2のようになる。

次にT-normの例としてパラメータを持つ演算を生成関数と共に示すと以下のようになる。

(10) $x \,\hat{\wedge}\, y$ 【Yager】

$$= 1 - \left(1 \wedge \sqrt[\lambda]{(1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda}\right), \quad \lambda > 0$$

$$f(x) = (1-x)^\lambda$$

(11) $x \,\hat{\wedge}\, y$ 【Schweizer（その1）】

$$= \sqrt[\lambda]{0 \vee (x^\lambda + y^\lambda - 1)}, \quad \lambda > 0$$

$$f(x) = 1 - x^\lambda$$

(12) $x \,\hat{\wedge}\, y$ 【Schweizer（その2）】

$$= \frac{1}{\sqrt[\lambda]{\dfrac{1}{x^\lambda} + \dfrac{1}{y^\lambda} - 1}}, \quad \lambda > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x^\lambda} - 1$$

(13) $x \,\hat{\wedge}\, y$ 【Hamacher】

$$= \frac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x+y-xy)}, \quad \lambda \geqq 0$$

$$f(x) = \log\frac{\lambda + (1-\lambda)x}{x}$$

表1　パラメータをもつT-normとパラメータλの関係

	∧	⊙	1·1	·	回	∧
Yager	→0	1				∞
Schweizer (1)	∞	1		→0		
Schweizer (2)				→0	1	∞
Hamacher	∞		2	1	0	
Frank		∞		→1		→0
Dombi	→0				1	∞
Weber	∞	0		−1		

(14) $x \hat{*} y$　【Frank】

$$= \log_\lambda \left[1 + \frac{(\lambda^x - 1)(\lambda^y - 1)}{\lambda - 1} \right], \quad \lambda > 0 \ (\lambda \neq 1)$$

$$f(x) = \log_\lambda \frac{\lambda - 1}{\lambda^x - 1}$$

(15) $x \hat{\wedge} y$　【Dombi】

$$= \frac{1}{1 + \sqrt[\lambda]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda + \left(\frac{1-y}{y}\right)^\lambda}} \quad \lambda > 0$$

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda$$

(16) $x \hat{\wedge} y$　【Weber】

$$= [(1+\lambda)(x+y-1) - \lambda xy] \vee 0, \quad \lambda \geq -1$$

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda(1-x))$$

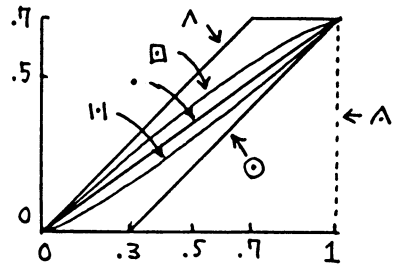


図3　(1)～(6)の演算の図示（但し, y=0.7）

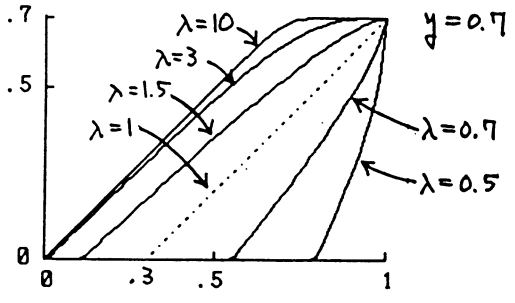


図4　Yagerの演算

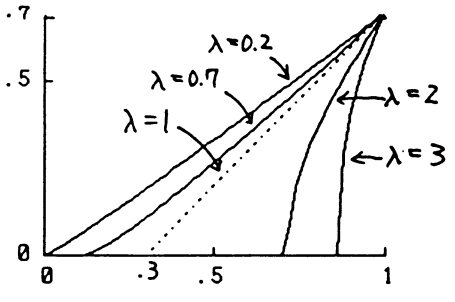


図5　Schweizer (1)の演算

以上，(10)から(16)までのよく知られたパラメータλをもつt-normがどのようなパラメータの時に(1)～(6)までの演算に一致するかを示したのが表1である。

さらに，これらの演算をパラメータλを変化させていくことによりどのようになるかをy=0.7の場合に表示させたのが図4～7である。また，図3はこれらの図との比較を行うために(1)～(6)の基本演算をy=0.7の場合に図示させたものである。

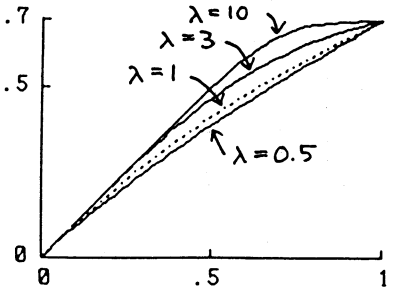


図6 Schweizer(2)の演算

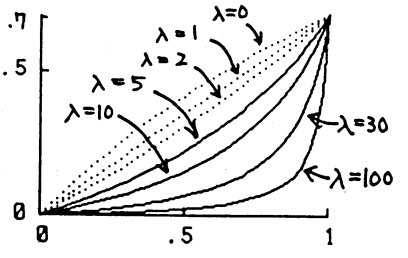


図7 Hamacherの演算

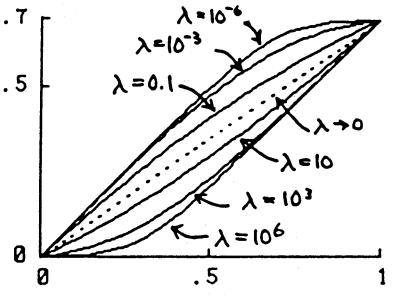


図8 Frankの演算

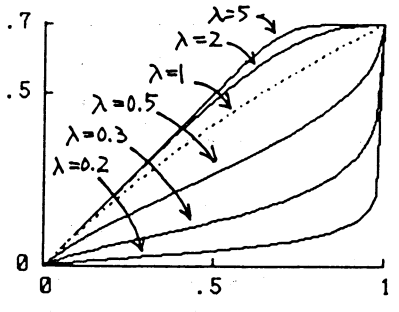


図9 Dombiの演算

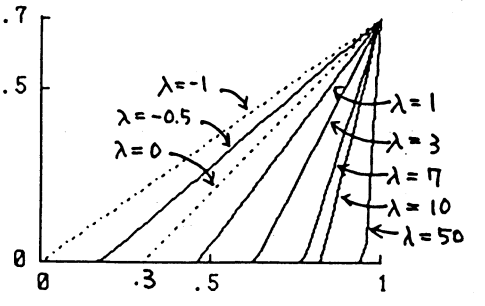


図10 Weberの演算

次に，パラメータλをもつT-normを新しく提案し，その生成関数と，基本演算との関係を示す．また，提案したt-normの一般形として複数個のパラメータをもつt-normを脚注に示す．

(17) $x \hat{*} y$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\lambda x}+\frac{1}{1+\lambda y}-\frac{1}{1+\lambda}\right)\wedge 1}-1\right], \lambda>0$$

$$f(x)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda x}-1\right)$$

$x \odot y \leqq x \hat{*} y \leqq x \boxdot y$
$(\lambda\to 0)$ $(\lambda\to\infty)$

(18) $x \hat{*} y$

$$= 1-\log_\lambda\left[\left(\lambda^{1-x}+\lambda^{1-y}-1\right)\wedge\lambda\right], \lambda>1$$

$$f(x)=\frac{1}{\lambda-1}\left(\lambda^{1-x}-1\right)$$

$x \odot y \leqq x \hat{*} y \leqq x \wedge y$
$(\lambda\to 1)$ $(\lambda\to\infty)$

(19) $x \hat{*} y$

$$= 1-\frac{1}{\lambda}\log\left[\left(e^{\lambda(1-x)}+e^{\lambda(1-y)}-1\right)\wedge e^{\lambda}\right], \lambda>0$$

$$f(x)=\frac{e^{\lambda(1-x)}-1}{e^{\lambda}-1}$$

$x \odot y \leqq x \hat{*} y \leqq x \wedge y$
$(\lambda\to 0)$ $(\lambda\to\infty)$

(20) $x \hat{*} y$

$$= \sqrt[\lambda]{1-\log\left[\left(e^{1-x^\lambda}+e^{1-y^\lambda}-1\right)\wedge e\right]}$$

$$f(x)=\frac{e^{1-x^\lambda}-1}{e-1}, \quad \lambda>0$$

$x \wedge y \leqq x \hat{*} y \leqq x \cdot y$
$(\lambda\to\infty)$ $(\lambda\to 0)$

【注】(18)~(20)の一般形として，3つのパラメータ α, β, γ をもつt-normを定義できる．

$$\sqrt[\gamma]{1-\frac{1}{\beta}\log_\alpha\left[\left(\alpha^{\beta(1-x^\gamma)}+\alpha^{\beta(1-y^\gamma)}-1\right)\wedge\alpha^{\beta}\right]}$$

$$f(x)=\frac{1}{\alpha^{\beta}-1}\left(\alpha^{\beta(1-x^\gamma)}-1\right), \quad \begin{matrix}\alpha>1\\ \beta,\gamma>0\end{matrix}$$

$x \wedge y \leqq x \hat{*} y \leqq x \wedge y$

$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\lambda x}+\frac{1}{1+\lambda y}-\frac{1}{1+\lambda}\right)\vee 1}\right]$ $-1<\lambda<0$

$f(x)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda x}-1\right)$ Sugeno

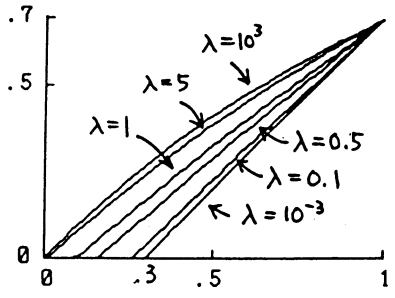


図11 演算(17)

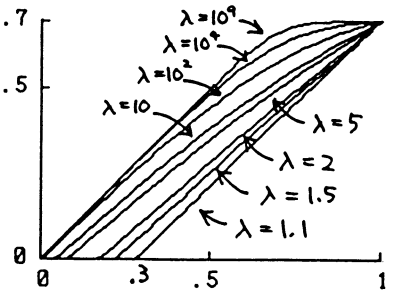


図12 演算(18)

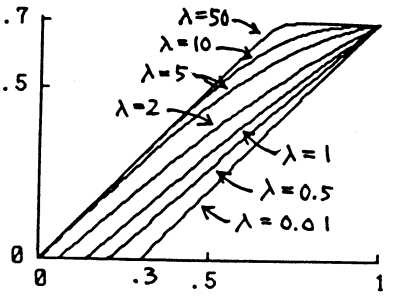


図13 演算(19)

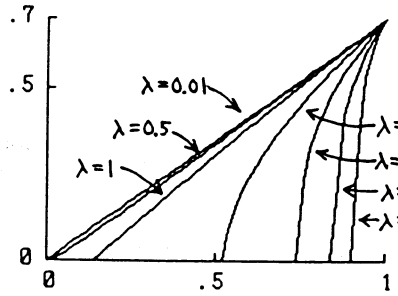


図14 演算(20)

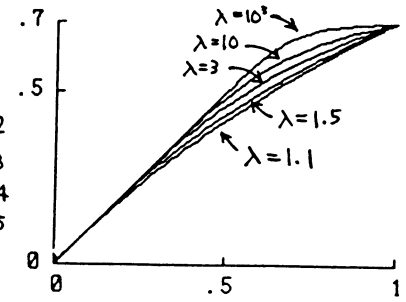


図15 演算(21)

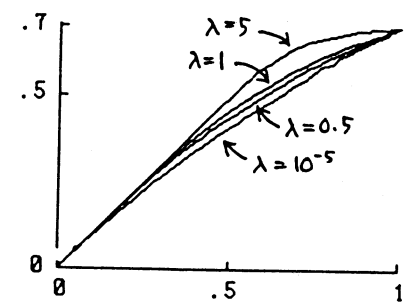


図16 演算(22)

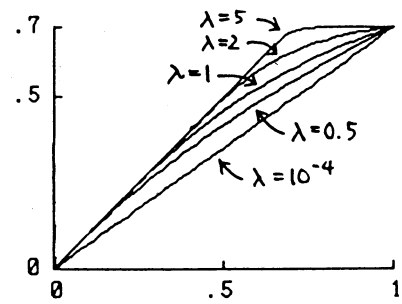


図17 演算(23)

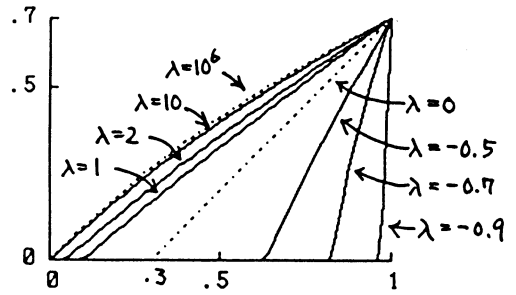


図18 演算(24)

(21) $x \hat{*} y$

$$= \frac{1}{\log_\lambda\left[\lambda^{\frac{1}{x}} + \lambda^{\frac{1}{y}} - \lambda\right]}$$

$f(x) = \lambda^{\frac{1}{x}} - \lambda$, $\lambda > 1$

$x \boxdot y \leqq x \hat{*} y \leqq x \wedge y$

$(\lambda \to 1)$ $(\lambda \to \infty)$

(22) $x \hat{*} y$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\lambda}\log\left[e^{\frac{\lambda}{x}} + e^{\frac{\lambda}{y}} - e^{\lambda}\right]}$$

$f(x) = e^{\frac{\lambda}{x}} - e^{\lambda}$, $\lambda > 0$

$x \boxdot y \leqq x \hat{*} y \leqq x \wedge y$

$(\lambda \to 0)$ $(\lambda \to \infty)$

(23) $x \hat{*} y$

$$= \frac{1}{\sqrt[\lambda]{\log\left[e^{\frac{1}{x^\lambda}} + e^{\frac{1}{y^\lambda}} - e\right]}}, \quad \lambda > 0$$

$f(x) = e^{\frac{1}{x^\lambda}} - e$

$x \cdot y \leqq x \hat{*} y \leqq x \wedge y$

$(\lambda \to 0)$ $(\lambda \to \infty)$

【注】(21)～(23)の一般形として、3つのパラメータ α, β, γ をもつ t-norm を定義できる。

$$\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\frac{1}{\beta}\log_\alpha\left[\alpha^{\frac{\beta}{x^\gamma}} + \alpha^{\frac{\beta}{y^\gamma}} - \alpha^{\beta}\right]}}$$

$f(x) = \alpha^{\frac{\beta}{x^\gamma}} - \alpha^{\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta, \gamma > 0$

$x \cdot y \leqq x \hat{*} y \leqq x \wedge y$

(24) $x \hat{*} y$

$$= \begin{cases} \dfrac{[xy(1+\lambda)^2-(1-x)(1-y)] \vee 0}{[(1+\lambda)^2-\lambda^2(1-x)(1-y)] \wedge (1+\lambda)(1+\lambda x)(1+\lambda y)} & \cdots \lambda \geq 0 \\ \dfrac{[xy(1+\lambda)^2-(1-x)(1-y)] \vee 0}{[(1+\lambda)^2-\lambda^2(1-x)(1-y)] \vee (1+\lambda)(1+\lambda x)(1+\lambda y)} & \cdots -1 \leq \lambda \leq 0 \end{cases}$$

$f(x) = \dfrac{1-x}{1+\lambda x}$, $\lambda \geq -1$ (Sugeno の否定)

$x \boxdot y \leq x \hat{*} y \leq x \wedge y$ (ただし, $\lambda=0$ のとき $x \odot y$)
($\lambda \to \infty$) ($\lambda=-1$)

最後に, t-norm を生成する生成関数の作成法について述べておく。既存の生成関数 $f(x)$ を利用して新しく生成関数 $f^*(x)$ を作る方法として以下のものがある。

【i】 生成関数 $f(x)$ が"正規化"生成関数である場合

$$f^*(x) = 1 - f(1-x)$$

により生成関数 $f^*(x)$ を新しく定義できる。

たとえば, $f(x) = (1-x)^\lambda$ である場合,

$$f^*(x) = 1 - x^\lambda$$

となる。これは (10) の Yager の演算と (11) の Schweizer (その1) の演算の生成関数を示している。

【ii】 任意の生成関数 $f(x)$ に対して

$$f^*(x) = f(g(x))$$

と定義する。ここで $g(x)$ は t-conorm を生成する"正規化"生成関数であり, $g(0)=0$, $g(1)=1$ となる連続・増加関数 $g: [0,1] \to [0,1]$ である。たとえば, $f(x) = 1-x$, $g(x) = x^\lambda$ とすると, $f^*(x) = 1-x^\lambda$ となり, 限界積 (5) と Schweizer (その1) の演算 (11) とが対応する。さらに, $g(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ とすると, $f^*(x) = 1 - \sin(\frac{\pi}{2}x)$ となり, (9) の新しい演算が生成される。

2. T-ノルムの Fuzzy 推論法への適用

$$\frac{A \to B}{A'} \qquad A, A', B, B' : \text{fuzzy集合}$$
$$B'$$

なる fuzzy 推論に対して, 結論 B' は, 通常, A' と $A \to B$ の max-min 合成を行うことによって得られる (推論の合成規則),

$$B' = A' \circ (A \to B)$$

$$\mu_{B'}(v) = \bigvee_u \{\mu_{A'}(u) \wedge \mu_{A \to B}(u, v)\}$$

ここで, $\vee = \max$, $\wedge = \min$

以下では, max-min 合成において min の代わりに t-norm を採用した場合に, また含意 $A \to B$ に t-norm を採用した場合にどのような結論 B' が得られるかを簡単に述べる。

[I] max-min 合成において, min の代わりに t-conorm ($\hat{*}$ と記す) を採用した max-$\hat{*}$ 合成を用いると, 結論 B' は

$$\mu_{B'}(v) = \bigvee_u \{\mu_{A'}(u) \hat{*} \mu_{A \to B}(u, v)\}$$

と与えられる。たとえば, $A \to B$ として, Zadeh の算術規則

$$A \hat{\to} B \Leftrightarrow 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))$$

を導入すると, たとえば $A' = A$ の時, 結論 B' は $\hat{*} \leq \odot$ ($\leftrightarrow 0 \vee (x+y-1)$) なる任意の t-norm $\hat{*}$ に対して

$$\mu_{B'}(v) = \bigvee_u \{\mu_A(u) \hat{*} \mu_{A \hat{\to} B}(u, v)\}$$
$$= \mu_B(v)$$

が成立する. すなわち, 限界積 $\odot$ よりも小さい t-norm $\hat{*}$ を max-$\hat{*}$ に使用したとき, 算術規則 $A \hat{\to} B$ に対して

$$B' = A \circ (A \hat{\to} B) = B$$

となる. すなわち, 次の modus ponens が成立することがわかる。

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \underline{A \qquad\qquad} \\ B \end{array} \quad (\text{modus ponens})$$

このことは算術規則 $A \underset{a}{\to} B$ だけでなく文献[1~3]で与えたすべての規則に対しても，$\mathbb{A} \leqq \odot$ となる max-$\mathbb{A}$ 合成を用いると modus ponens を満たす結論が得られることが示される．ちなみに，$\mathbb{A} \leqq \odot$ を満たす t-norm としては次のものがある。

(5) $\odot$　(6) $\wedge$　(9) $\hat{\wedge}$　(10) Yager 積 ($\lambda \leqq 1$)
(12) Schweizer 積 (与の1) ($\lambda \geqq 1$)
(16) Weber 積 ($\lambda \geqq 0$)　(24) Mizumoto 積 ($\lambda \leqq 0$)

[II] fuzzy 推論の含意規則 $A \to B$ として t-norm 採用する，すなわち

$$\mu_{A \underset{*}{\to} B}(u, v) = \mu_A(u) \mathbin{\hat{\wedge}} \mu_B(v)$$

とすると，任意の t-norm $\mathbb{A}$ に対して

$$B' = A \circ (A \underset{*}{\to} B) = B$$

が成立する。すなわち，modus ponens が成立する。この場合，max-min 合成だけでなく，他の合成に対しても同様なことが言える。

以下では，[II]の含意規則として t-norm を採用した場合の fuzzy 制御への応用を述べる。

3. T-ノルムの Fuzzy 制御への応用

本節では，含意規則として t-norm を用いた場合の簡単な fuzzy コントローラを一次遅れの系に適用し，制御結果を比較する。

前頁の fuzzy 推論法において $A' = u_0$ とした場合，結論 B' は

$$\mu_{B'}(v) = \mu_{A \to B}(u_0, v)$$

と与えられる。含意規則 $A \to B$ として，Mamdani, Larsen は次の方法を与えており，これらは fuzzy 制御においてよく用いられている。

$$\mu_{A \to B}(u_0, v) = \mu_A(u_0) \wedge \mu_B(v) \cdots \text{Mamdani}$$
$$= \mu_A(u_0) \cdot \mu_B(v) \cdots \text{Larsen}$$

ここでは，これらの一般形として t-norm $\mathbb{A}$ を用いた場合について考察していく。

$$\mu_{A \to B}(u_0, v) = \mu_A(u_0) \mathbin{\hat{\wedge}} \mu_B(v)$$

複数個の fuzzy 条件文が与えられた時，

R_1: $A_1 \to B_1$ (else)
R_2: $A_2 \to B_2$ (else)
R_3: $A_3 \to B_3$

$A' = u_0$ に対する結論 B' は

$$B' = B_1' \cup B_2' \cup B_3'$$

と与えられる．ここで

$$\mu_{B_i'}(v) = \mu_{A_i}(u_0) \mathbin{\hat{\wedge}} \mu_{B_i}(v)$$

この統合された結果 B' の重心 v_0 は

$$v_0 = \frac{\int v \mu_{B'}(v) dv}{\int \mu_{B'}(v) dv} \quad (B' \text{の重心})$$

と与えられる。

u_0 を偏差値，v_0 を操作量とみなした場合の fuzzy 制御について述べて行く。

対象とする系は $T\frac{dh}{dt} + h = g$ で表わされる一次遅れの系であり，fuzzy 制御規則は偏差のみに依存する最も簡単なものである．

R_1: Δh is PB $\to$ Δg is NB
R_2: Δh is Z $\to$ Δg is Z
R_3: Δh is NB $\to$ Δg is PB

ここで，PB (positive big), Z (zero), NB (negative big) は右図に示すような fuzzy 集合である．

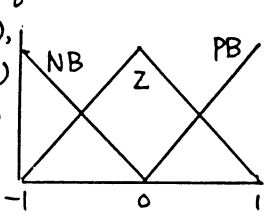


図19. Fuzzy 集合 PB, Z, NB

図20は，t-norm $\mathbb{A}$ として式(1)~(6)の基本演算を用いた場合の制御結果であり，図21は Yager の演算(10)をパラメータ λ を変化させていった時の制御結果である。これより激烈積 $\wedge$ に近ずくにつれて制御は敏感になっていくことがうかがえる。図22は比較のために，$A \to B$ として種々の含意規則を用いた場合の制御結果である(記号は文献[1]を参照)。

[1] Mizumoto, Zimmermann: "Comparison of fuzzy reasoning methods", Fuzzy Sets and Systems, 8, 1982.
[2] Mizumoto: "Fuzzy conditional inference under max-⊙ composition", Inform. Sci., 27, 1982.
[3] Mizumoto: "Fuzzy reasoning under new compositional rules of inference", Kybernetes (to appear).

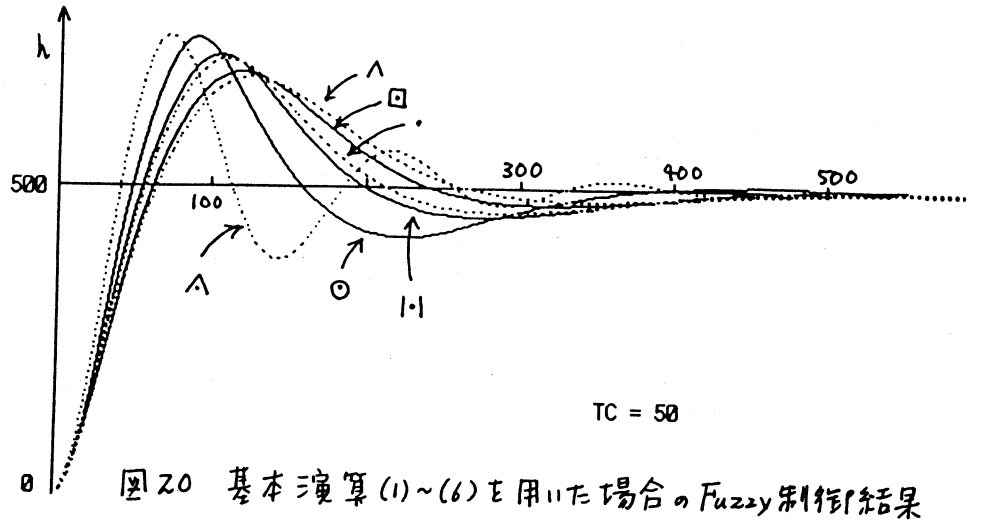


図20 基本演算(1)~(6)を用いた場合のFuzzy制御結果

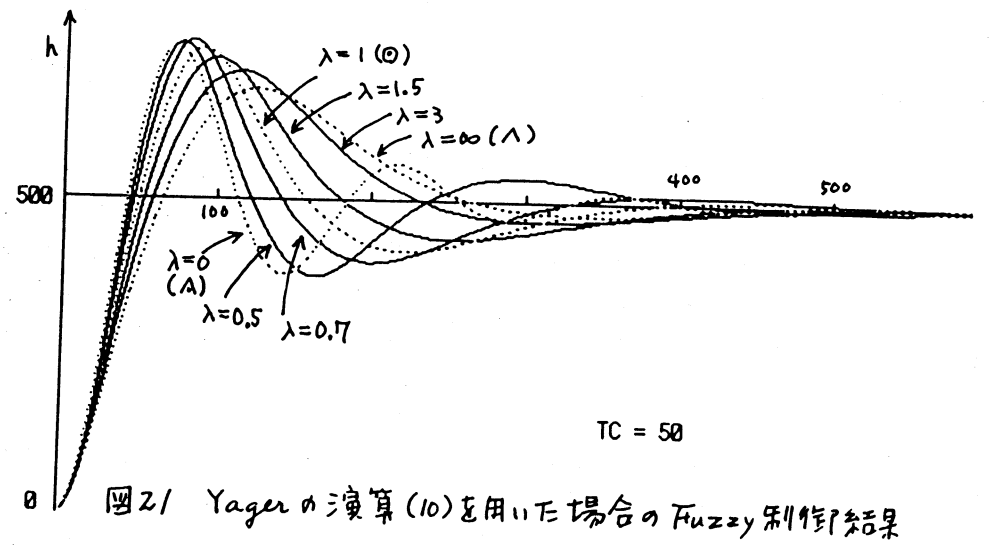


図21 Yagerの演算(10)を用いた場合のFuzzy制御結果

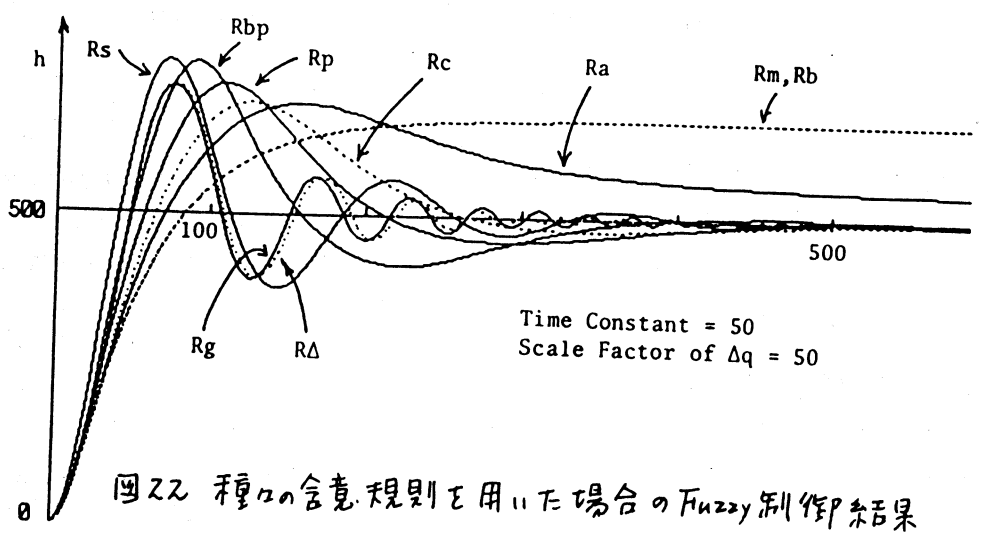


図22 種々の含意規則を用いた場合のFuzzy制御結果

Ｆｕｚｚｙロボットに関する研究

法政大学　　寺野寿郎　増井重弘

１．緒言

現在の人工知能やロボットの動作は、ほとんど確定的な論理を基としている。そのため命令に少しでも矛盾や不明確さが含まれていると作動しない。しかし、人間が要求するロボットの行動は必ずしも厳密なものばかりではない。人間の日常生活の中には、結果さえ満足できれば十分であるという作業が多くある。また人間の発する命令も定性的（あいまい）である。人間は常識を用いて定性的命令に対し問題を処理し生活している。本研究は人間の発する定性的な命令を受けて、ロボット自身が持つ定性的な内部知識で意味的に近い行動をするＦｕｚｚｙロボットを簡単なマニピュレータで実現した結果を報告する。

２．Ｆｕｚｚｙロボットの基本

Ｆｕｚｚｙロボットは、定性的命令に対し人間と同じような行動を実行するものであるから人間同様命令の理解、状況の認識、内部知識を要する。

（イ）定性的命令の理解

人間の発する定性的命令には多種多様あるが人間は日常生活の中で明確な根拠がなくても、常識によって問題を処理している。そこで、ロボットがある命令を理解するには、人間と同じような常識を持たせる必要がある。すなわち、人間がある命令に対してとのように行動するのかを考え、この行動をルール化することである。例えば「約１５ｃｍの線を引け」という命令に対しては、人間の行動は「約１５ｃｍ」という概念で単に線を引くだけであるから、あいまい命令である「約１５ｃｍ」をＦｕｚｚｙ数で理解し、ロボット自身のもつ長さに関するＦｕｚｚｙ数の内部知識とのマッチングの最適値を実行すればよい。「障害物をよけて目標地まで物を運べ」というような命令に対しては、人間がどのようにして障害物をよけて行くかの行動ルールが必要となり、この行動ルールによりあいまい命令を理解する。定性的命令の中には漠然とした命令や不完全な命令もある。このような命令に対しても人間は上手に問題を処理していく。ロボットに対しても漠然とした命令や不完全命令を人間と同じような行動をルール化して理解し対処させる必要がある。しかし例えば「ごみを拾え」あるいは「右側のごみを拾え」（実際には左側にある）というような漠然とした命令や不完全命令に対し単純に人間の行動をルール化するのは困難である。そこで本研究では人間のとり得る行動を列挙し階層構造を形成してツリー構造の簡単なプロダクションシステムとして命令の理解をさせた。

（ロ）命令に対する状況認知

定性的命令（あいまい命令）の意図の理解後のロボットの状況認知の表現は、Ｆｕｚｚｙ数で表わす。これは、あいまい命令そのものでも漠然とした命令や不完全命令でも状況は定性的だからである。漠然とした命令や不完全命令に対する状況認知はデフォルト推論をもちいてＦｕｚｚｙ数で表わす。また、状況認知をＦｕｚｚｙ数で表わすことにより、内部知識とのマッチングが簡単となる。

（ハ）内部知識

Ｆｕｚｚｙロボットは厳密な正確さを要求するものではなく、与えられた定性的命令に対し目的を達成すれば十分である。そこでロボットの内部知識は命令に対し目的の達成が可能な範囲の集約をＦｕｚｚｙ数で表わし少数の内部知識で多量の情報の処理ができるようにする。

（二）人間行動のルール化

前述の定性的命令の理解に人間の行動ルールを用いたが、人間行動のルール化は、ロボットを人間の行動と同じように動作させるために必要不可欠なものである。人間の行動思考は主観的に考えることができるからルール化も簡単にできるのでプログラムも容易にできるし、各種の行動に対しプログラムの転用も可能である。また、Ｆｕｚｚｙ数のマッチングを取って実行していくのでルールの実行も容易である。

３．定性的な内部知識と定性的な命令または状況認知のマッチング

自然言語による定性的な命令（あいまい命令）に対するロボットの行動はロボットの持つあいまいな内部知識とあいまい命令とのマッチングにより行う。マッチングの取り方には多くの研究が発表されているが、ここでは数理的真理値による逆真理値限定法を用いた。すなわち、あいまいな命令とあいまいな知識を表わすＦｕｚｚｙ集合Ａ，Ｂが与えられた時、ＡとＢのマッチングの割合を次の定義式で数値的に求める。[1]

$$t = N(A/B)$$
$$= 1/2\{Sup(A \cap B) + Inf(A \cup B^{7})\} \cdots\cdots\cdots (1)$$

Ｆｕｚｚｙロボットは自分の持つＦｕｚｚｙ知識のうちＦｕｚｚｙ命令とのマッチングｔが最大のものを選んで実行することになる。簡単な例として、ロボットに線を引く事を実行させた。これは、ロボットにあらかじめ、“あいまいな長さ”の内部知識を二等辺三角形で表わされるメンバーシップ関数で複数個入れておきロボットに対する“あいまいな命令”（Ｆｕｚｚｙ数で表わす）と内部知識とを比較することにより行う。ロボットはマッチングによりあいまい命令に対して意味的に最も近い内部知識を選択し行動する。　Ｔａｂｌｅ．１．は「約１５ｃｍの直線をひけ」という命令にたいする内部知識のマッチングの程度を示し，Ｆｉｇ．１，はこの時のメンバーシップ関数を示している。実行はこのマッチングにより選択した内部知識のメンバーシップ関数が１のところの値で行う。　この結果、ロボットは１６ｃｍの直線を引いた。

命令〔約15cm〕 頂点15cm, あいまいの幅10cm

内部知識 頂点位置	内部知識 あいまい幅	マッチングの割合	内部知識 頂点位置	内部知識 あいまい幅	マッチングの割合
2 cm	2 cm	0.0	12cm	2 cm	0.667
3 cm	〃	0.0	16 cm	〃	0.833
7 cm	〃	0.25	18 cm	〃	0.667
10 cm	〃	0.5	21cm	〃	0.417

Table. 1, 命令と内部知識とのマッチングの割合

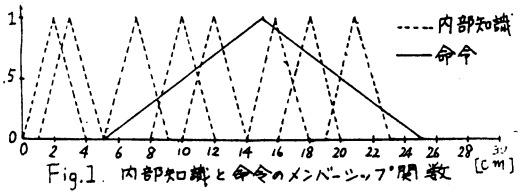


Fig.1. 内部知識と命令のメンバーシップ関数

４．障害物をよけて物を運ぶ実行例

Ｆｕｚｚｙロボットに人間と同様の行動をさせるために人間が障害物をさけて目標地まで物を運ぶ考え方を用いて実行させた。即ち、ロボットは目標地のあいまいな位置は知っているが、その視野は人間の視野と同じであり目標地との間に障害物があれば目標地を見

通すことができず、障害物が多数存在し、後ろの障害物が遮断されている場合も、その障害物はみえず、また、視野に入る障害物の位置もあいまいである。Ｆｉｇ．２，は、このような状況でロボット自身が判断し、障害物をよけて目標地に到達した実行例を示す。障害物をよけたり、目標地に到達させるため、ロボットに距離と方向のあいまいな内部知識をもたせる。距離の内部知識は、５～４５mm毎に入れて、あいまいの幅を各２０mmとした。方向の内部知識は、０～３６０度まで３０度毎に入れてあいまいの幅を各４５度とした。ロボットの現在地から目標地や障害物までの距離と方向の認識によるあいまいの幅は距離に関してはその距離分だけ、方向に関しては９０度とした。ロボットが障害物のどちらの端を回るかの判断は、目標地のある方向に近い端を選ばせる。ロボットは距離と方向をあいまいに測定し、それぞれの値と内部のあいまいな知識とのマッチングをとり、方向と距離を決定し行動する。ロボットの行動は人間の行動に基づき形成した障害物よけ論理のＦｉｇ．３，のフローチャートに示した手順で行われる。この結果、Ｆｕｚｚｙロボットはｆｉｇ．２（ｂ），に示す如く、近道を選んでＦｉｇ．２（ａ），と異なる行動をした。

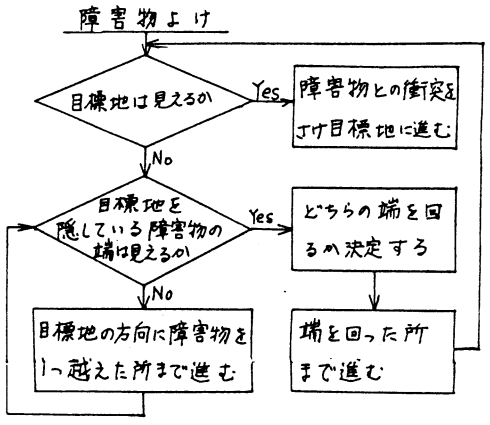


Fig.3, 障害物よけの論理

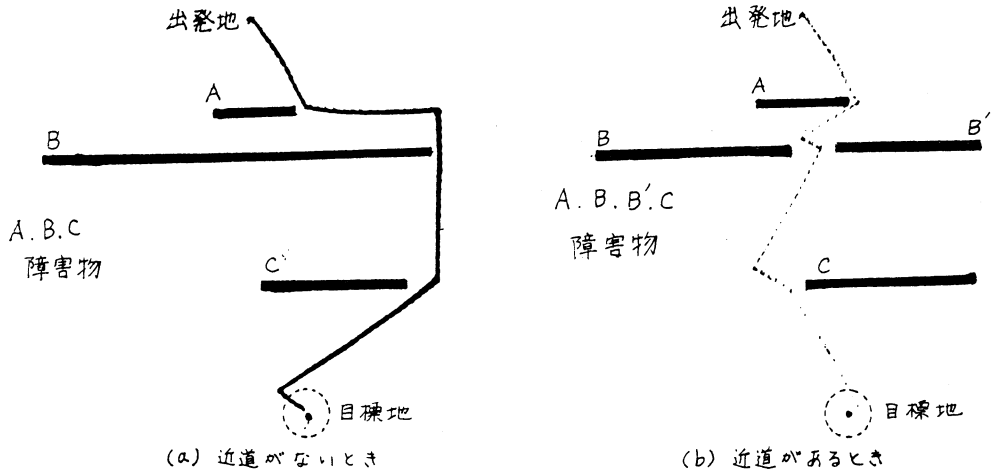


Fig.2, 障害物をよけて物を運ぶ実行例(ロボットが描いた軌跡)

５．屑拾いの実行例

「屑を拾え」という漠然とした命令や台の「右上にある屑を拾え」（実際は左下）といった命令に指示の間違いがあるような不完全命令に対して触覚のみでロボット自信が判断して屑を拾うことを実行させた。本研究のロボットは一方の手に触覚センサを持っているのみであるから、人間が不完全命令に対し手探りで物を探す行動を考える。この人間の常識的行動をルール化しｉｆ～ｔｈｅｎ～で表現しＦｉｇ．４，に示すような階層構造にして整理する。ルールは命令の信頼度、行動の決定、行動範囲、屑の確認可能範囲の４段階

のレベルに分けた。階層構造のルールは、例えば、

C_3 ：if　指示場所を広げて探したが無かった
　　then　指示の信頼度はどちらかといえば偽
R_3 ：if　指示∧指示がどちらかといえば偽
　　then　指示場所以外を探す
r_{20} ：if　指示場所以外を探す∧指示が「右」
　　then　探索範囲はＦｕｚｚｙ数の「広い左」

のようなｉｆ～ｔｈｅｎのルールである。

層を探すことができない場合は、バックトラックをする必要がある。このバックトラックはメタルールを適用して行う。このメタルールの作成にはＦＴＡ（Fault Tree Analysis）の手法を用いる。Ｆｉｇ．５，のようなＦＴＡを用いると、層を探すことが出来ない因果関係が明確となりメタルールの作成ができる。本例のメタルールは「指示の間違い」を採用した。Ｆｉｇ．６，に層拾いのフローチャートを示す。指示命令が出され信頼度判定ルールを経て行動ルールにより行動が決ると、命令に対する状況の認知として行動範囲のＦｕｚｚｙ集合のメンバシップ関数が決定する。状況認知のメンバシップ関数は人間の行動を考えデフォルト推論を用いて定める。(2)

例えば、単に「層を拾え」といったように場所の指示がない場合は、層は台の上に存ることを暗黙の了解として、人間の常識的行動をデフォルト推論によるＦｕｚｚｙ数で表現する。人間は層をさがす場合に台の中央付近から探すであろう。そこで、状況認知をメタ記号Ｍを導入することにより、

d_1 ：Ｐ（層）∧ＭＣｘ∧ＭＣｙ ⟶ Ｃｘ，Ｃｙ
　　Ｃｘ（台の左右方向の中央付近）
　　Ｃｙ（台の上下方向の中央付近）

とする。このデフォルト推論による状況認知のメンバシップ関数をＦｉｇ．７，（ａ）に示す。Ｆｉｇ．７，（ｂ）は、「右の層を拾え」と指示されたときの状況認知のメンバシップ関数を示す。このように命令に対する状況がＦｕｚｚｙ数で認知したのにもかかわらず内部知識として場所を点探索するのは探索回数が多くなり処理に時間がかかる。そこで、層を探索するのに充分と思える大きさの面を内部知識として必要数だけ導入しておく。この各内部知識の表現もＦｕｚｚｙ数で表わす。Ｆｉｇ．８，に示す台にある円形の面が内部知識を表わし、この面の内部知識のメンバシップ関数は台の下と横に描かれた点線の二等辺三角形である。Ｆｉｇ．８，は「右の層を拾え」という命令に対する探索の状態を示すもので、状況認知とのメンバシップ関数のマッチングを行いながら探索している。最初に探索した場所はＬであり、次にＭ，Ｅ……と順次探索していく。探索した内部知識は削除する。本例では、右を探索したが層がないので指示が間違いであると判断し、状況認知のメンバシップ関数を左に変更し、左を探索した結果、層を探すことができた。この探索は人間が闇で手探りで物を探す行動を想定し内部知識を設定しルール化したものである。指示が適切である場合はむろん不完全な指示に対しても、ロボットは自分自信で判断し層

を探すことができた。ロボットが屑を探しても、この場所範囲ではまだ他方のハンドで適確に屑を拾うことができない。適確に屑を拾うためにもう少し範囲を明確にする必要がある。そこで、Ｆｉｇ．９，に示す屑の拾い方のサブルーチンのフローチャートにより内部知識の面の大きさの1/4 に屑の存在範囲をせばめた。この結果「屑を拾って捨ろ」という命令に対し、ロボットは他方のハンドで屑をつかんで所定の場所に捨てるという行動を実行した。Ｆｉｇ．１０，の写真はこの行動を実行しているロボットの様子を写したものである。

６．結論

Ｆｕｚｚｙロボットは人間の発する定性的や不完全な命令に対し柔軟に対処できることが判明した。Ｆｕｚｚｙ集合の利用は人間の常識や行動をルール化したり表現するのが容易であるためプログラミングが簡単にできる。また、内部知識にＦｕｚｚｙ数を用いマッチングを行っているためコンピュータの容量や処理速度をかなり少なくできる。

本研究により、人間の発する自然言語によるあいまい命令に対し、人間に近い行動をとるロボットの実現の手掛りが得られた。

なほ、本研究は、文部省の昭和５９年度科学研究補助金（一般研究Ｃ）により行われたものであり援助に深謝する。

文献（１）H.Imaoka,T.Terano &M.Sugeno:Recognition of Linguistically Instructed Path to Destination,Fuzzy Information &Decision Process p341/350 1984

（２）岩井壮介、片井修：あいまい情報の処理と知識工学、システムと制御、第２８巻１０号

（３）秋月影雄、吉江修、藤村茂：ファジィ集合を用いた目標指向型プロダクションシステム、第２９回自動制御連合講演会１９８４年１１月

（４）斉川幸貴、郡司芳則：ファジィロボットの研究、昭和５９年度法政大学卒論文

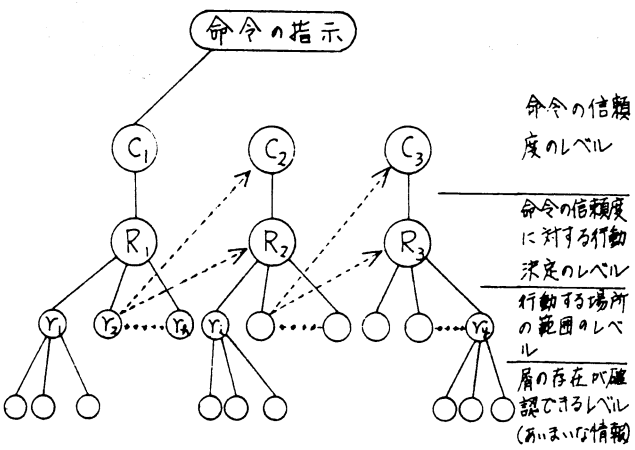


Fig.4, 屑の探索の階層構造

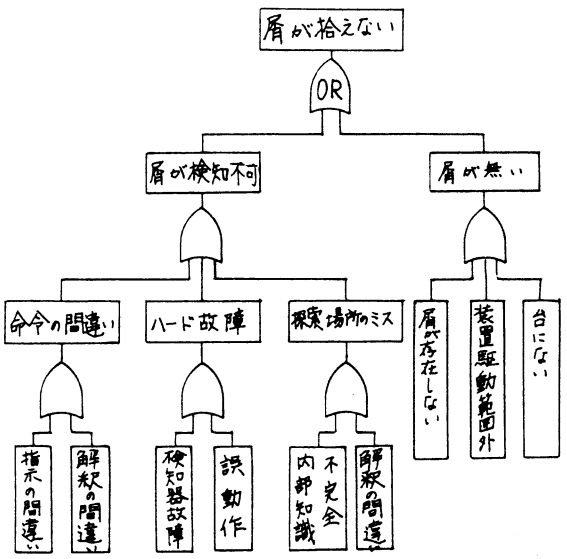


Fig.5, 屑の探索の失敗樹木

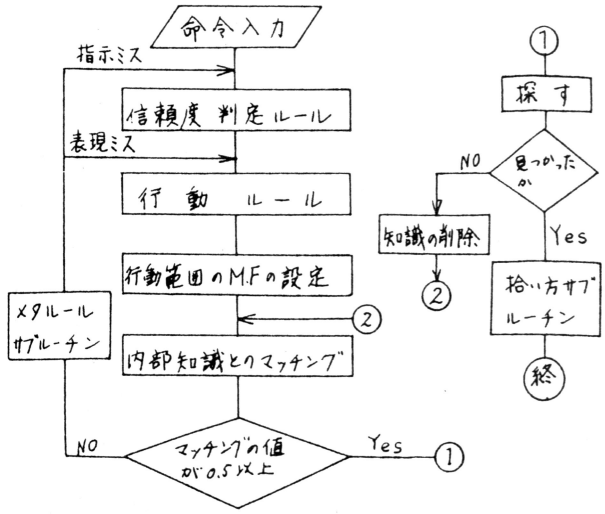
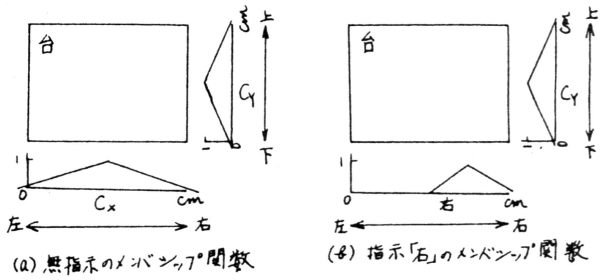


Fig. 6, 屑拾いのフローチャート



(a) 無指示のメンバシップ関数　(b) 指示「右」のメンバシップ関数

Fig. 7, 状況認知のメンバシップ関数

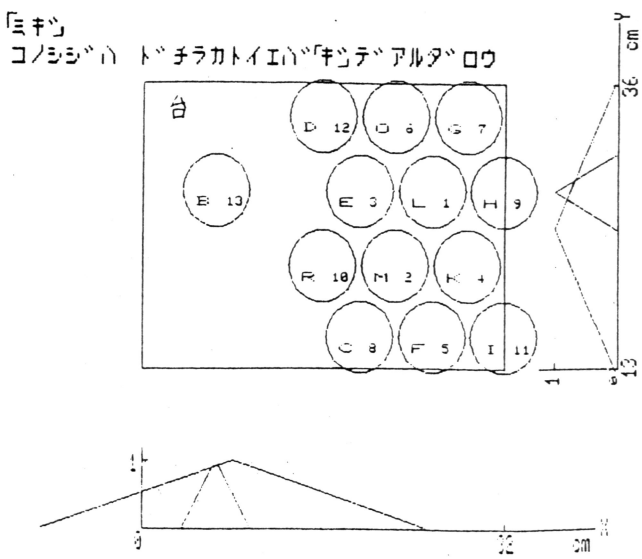


Fig. 8, 状況認知と内部知識とのマッチングによる探索

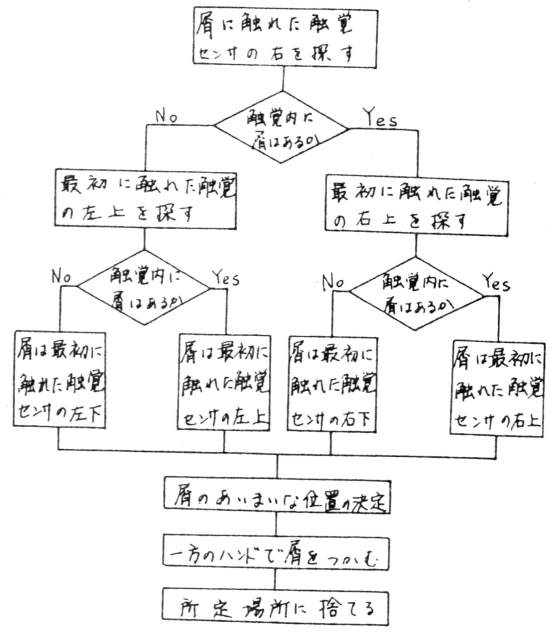


Fig. 9, 屑の拾い方のフローチャート

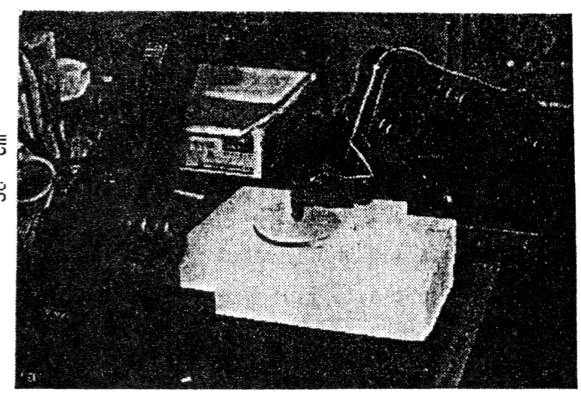


Fig. 10, 屑の探索を実行中のFuzzyロボット

membership,vaguenessを用いた移動物体把握ロボット

法政大学　廣田 薫　※荒井 良徳

１．はじめに

近年、ロボットは人間の代行者として様々な場所で使用され、その目的も多様化している。しかし、そのほとんどが正確な情報のもとで決められた行程を規則正しく運行するものにとどまっている。これに対して、あいまいさを含む情報をうまく扱い、柔軟な対応が可能なロボットの出現が望まれている。

あいまいさを積極的に取り扱う手法の一つとして、Zadehによって提唱されたあいまい集合論[1]がある。 HamdaniとAssilianは、このあいまい論理を意思決定問題として制御に適用し[2]、ファジィ制御分野を開拓した。最近ではこれに学習を取り入れた研究も行なわれている[3]。

ファジィ制御は、操作者が運用中に利用している定性的な制御戦略を言語表現した、いわゆる言語制御規則によって推論し、アルゴリズムを決定する点に特徴がある。

ファジィ制御を利用して、プラント、列車運転等の制御[4][5]などの実用研究も行なわれている。また、筆者らは、文献(6),(7),(8)であいまいさをロボットに適用し、（静止）物体を掴み取るアルゴリズム及び、その応用例を紹介した。しかし、他にはあいまいさをロボットに取り入れた研究例はあまりみられない[9][10]。

ここでは、画像センサから得られるあいまい情報をもとにしてファジィ制御を行ない、実時間処理でベルトコンベア上の可変速度物体を掴み取る５自由度垂直多関節型ロボットアームシステムの構築を試みた。あいまい情報の表現には、従来のmembershipと共にvaguenessの概念[11]を取り入れた。

以下では、このmembershipとvaguenessを利用したロボットアームシステムの個々のアルゴリズムとその運用実験結果について述べる。

２．あいまいさの取り扱い

人間が移動物体を把握する場合、通常は物体の速度、手と物体間の距離等を考慮して、予想される適切な位置に手を持っていくと考えられる。また、人間が手を使う点に関しては、良く学習された専門家であるとみることもでき、高度の学習付フィードバック制御システムと考えることもできる。

ここでは、簡単化のため移動方向を１次元に限定し、この方法をそのままロボットで実現することにした。つまり、物体の速度及びハンドと物体間の距離という２つの状況情報に対して、どこにハンドを持っていったらよいかという出力情報を推論してやる制御戦略を用いた。この出力情報は、観測した時点の物体位置から移動方向への距離で表わされる予想移動距離を示す。また、制御は実時間でフィードバックをかけて行なうのではなく、ある程度ハンドを動かしてから、推論して制御を行うものとした。

２．１　membership情報の利用

ファジィ制御における推論方法は、Zadehによって提案された[1]compositional rule of inference に基ずいている。ＦとＧが各々異なる台集合上のファジィ部分集合であるとして、次のあいまい命題Ｐを考える。

$$P：IF\ \ F\ \ THEN\ \ G \triangleq F \rightarrow G \qquad (2-1)$$

この時あいまい関係Ｒは命題関数ｆを用いて

$$R = f(F, G) \qquad (2-2)$$

で与えられる。今、この関係に前提F^0 が与えられると結論G^0 は、

$$G^0 = F^0 \circ R \qquad (2-3)$$

で表わされる。ここで$\circ$は合成演算（ composition rule of inference ）で、通常

maxmin 演算が用いられている。ここでは、命題関数 f にmembership関数による積（⊗）を用い次のようにした。

$$R = f(F, G) = F \otimes G \qquad (2-4)$$

さて、ここでは、前提で与えられる状態情報には、物体速度とハンド－物体間距離の２種類がありそれぞれのファジィ集合をＶ，Ｌとする。これらの台集合に対し、表１のように、規格化したあいまいラベルを用意する。また、出力情報は、物体の現在位置からの距離であり、この台集合をＰとする。この台集合に対しても、同様に表１のように規格化したあいまいラベルを用意する。

実際の制御規則の１つは次のような命題として表現される。

$$\mathrm{IF\ V\ is\ } V_i \mathrm{\ AND\ L\ is\ } L_j \mathrm{\ THEN\ P\ is\ } P_{ij} \qquad (2-5)$$

ここで、V_i ，L_j ，P_{ij} は表１に示したあいまいラベルである。

状態（V_i とL_j ）に対する出力P_{ij} は、表２に示す制御規則写像のとうりである。例えば、状態が" $\mathrm{V\ is\ } V_2 \mathrm{\ AND\ L\ is\ } L_4$ "ならば、出力ＰはP_2 となるわけである。

このように、制御規則全体は、ｉとｊの組み合わせによる２４（＝４ｘ６）個の命題をＥＬＳＥで結合した次のような複合命題で表わされることになる。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{IF\ V\ is\ } V_1 \mathrm{\ AND\ L\ is\ } L_1 \mathrm{\ THEN\ P\ is\ } P_1 \mathrm{\ ELSE}\\
&\mathrm{IF\ V\ is\ } V_1 \mathrm{\ AND\ L\ is\ } L_2 \mathrm{\ THEN\ P\ is\ } P_1 \mathrm{\ ELSE}\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\mathrm{IF\ V\ is\ } V_4 \mathrm{\ AND\ L\ is\ } L_5 \mathrm{\ THEN\ P\ is\ } P_7 \mathrm{\ ELSE}\\
&\mathrm{IF\ V\ is\ } V_4 \mathrm{\ AND\ L\ is\ } L_6 \mathrm{\ THEN\ P\ is\ } P_8
\end{aligned} \qquad (2-6)$$

この命題より、求まる関係Ｒは、１５ｘ１７ｘ１７の３次元配列となり、（２－４）式に従ってあらかじめ計算して記憶しておく。

ある状態（V^0 ，L^0 ）が与えられると（２－３）式により出力P^0 が推論される。

２．２　vagueness情報の利用

Zadehによるあいまい集合論　を応用し拡張したものに、確率集合論の拡張ファジィ表現がある[11][12]。ここでは、あいまいさを扱う上で後者を適用し、従来のmembership関

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	近い ←											→ 遠い			
V1	1.0	1.0	1.0	0.5	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V2	0	0.2	0.4	0.5	1.0	0.5	0.4	0.2	0	0	0	0	0	0	0
V3	0	0	0	0	0	0.2	0.4	0.5	1.0	0.5	0.4	0.2	0	0	0
V4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.4	0.5	1.0	1.0	1.0

(a) 速度(V)のあいまいラベル

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	近い ←											→ 遠い					
L1	1.0	0.8	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L2	0.1	0.6	1.0	0.6	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L3	0	0	0.1	0.6	1.0	0.6	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L4	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	1.0	1.0	0.6	0.1	0	0	0	0	0	0
L5	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	1.0	1.0	0.6	0.1	0	0
L6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	1.0	1.0

(b) 距離(L)のあいまいラベル

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	近く ←										→ 遠く						
P1	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P2	0.1	1.0	0.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P3	0	0.2	1.0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P4	0	0	0.1	0.6	1.0	0.6	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P5	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	0.6	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
P6	0	0	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	0.6	0.1	0	1.0	0	0	0	0
P7	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	1.0	0.6	0.1	0	0	0
P8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0

(c)出力距離(P)のあいまいラベル

表１．Ｖ，Ｌ，Ｐの離散形あいまいラベル

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
V1	P1	P1	P1	P2	P3	P4
V2	P1	P2	P2	P3	P4	P5
V3	P1	P2	P4	P5	P6	P7
V4	P1	P3	P5	P6	P7	P8

$(V_i \text{ AND } L_j) \longrightarrow P_{ij}$

表２．制御規則写像

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
V1	0	0	0	0	0	0
V2	0	0	0	0.2	0.3	0.4
V3	0	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5
V4	0	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5

$\text{vagueness}=(V_i, L_j)$

表３．ＶＡＧＵＥＮＥＳＳ　ＭＡＰ

念と共にvagueness概念を導入した。拡張ファジィ表現では、membershipを１次モニター、vaguenessを２次モニターと呼んで、共に［０，１］の数値で表現する。２次モニターのvaguenessは、１次モニター（membership）の確実性を示す指標（度合）であり、通常はmembership+vagueness値を、従来のmembership値のようにして扱うことが多い。

ここでは、推論の際には、このvagueness値をいたる所で０（ clearly ）にして、推論を行ない、その結果としてロボットを制御する際に、 vaguenessの概念を反映させることにした。推論された出力結果には、いわば、どこで物体を取るかが示されるわけで、物体に厳密に追従する必要性は特になく、ある程度ハンドが移動した後に、推論を行なえばよい。これは、物体の移動が複雑な場合であっても、まずは手を近づけてから追従を行なうという人間の手法に近いものであろう。

具体的には、速度が速く、距離が遠いほど推論された結果の確実さは減ると考え、表３のようなvagueness mapを用意した。例えば、"Ｖ is V_3 ＡＮＤ Ｌ is L_4 "という状態ならば、推論された結果のvagueness値（漠度）を０．３とする。この値をもとに、（１－０．３）ｘ１００％として、ハンドが推論された地点へ向かう７０％の道程で停止して、再度推論を行なうことにする。

３．ロボット制御方法

移動物体把握ロボットのアルゴリズムを機能別に分解すると、次のような６ブロックになる。

（１）観測部 （ｏｂｓｅｒｖａｔｉｏｎ ｂｌｏｃｋ）
（２）量子化部 （ｑｕａｎｔｉｚａｔｉｏｎ ｂｌｏｃｋ）
（３）推論部 （ｉｎｆｅｒｅｎｃｅ ｂｌｏｃｋ）
（４）解釈部 （ｉｎｔｅｒｐｒｅｔａｔｉｏｎ ｂｌｏｃｋ）
（５）（ロボット）制御部 （（ｒｏｂｏｔ） ｃｏｎｔｒｏｌ ｂｌｏｃｋ）
（６）把握部 （ｃａｔｃｈｉｎｇ ｂｌｏｃｋ）

以上の（１）～（５）では、あいまいさを十分利用して、ハンドが物体のすぐ近くに誘導されるまでこの順に動作を繰り返す。ハンドが物体付近まで誘導されたら、ブロック（６）で実時間のフィードバックをかけ、実際に物体を摑み取るわけである。

以下に、これらの各ブロックのアルゴリズムを説明する。

３．１ 観測部（ｏｂｓｅｒｖａｔｉｏｎ ｂｌｏｃｋ）

ここでは、移動物体を観測し、必要な情報の抽出を行なう。

必要な情報は、２で述べたように、２種類の状態情報であり、移動物体の速度及びハンドと物体間の距離である。これらの情報抽出は、ベルトコンベアを写し出すＩＴＶカメラから取り込んだ画像を処理して行なう。カメラとベルトコンベアとの位置関係は既知であるので（詳しくは４で述べる）、移動物体の画像上での位置座標とベルトコンベア上での位置座標は、１対１対応で求まる。つまり、ベルトコンベア上にある物体が、カメラに写しだされれば、その物体の位置がわかることになる。

移動物体の速度は、物体がある時間（Δｔ）内に動いた距離を（Δｌ）とし、その２つの変位量により求まり、速度ｖは、

$$v = \Delta l / \Delta t \qquad (3.1)$$

で決定される。Δｌ，Δｔは２回の観測により簡単に求まる。

ハンドと物体間の距離は、ハンドと物体の各々の座標より求める。ハンドの座標は既知であり、物体の座標は画像処理によって求まる。

この観測部で抽出された２つのデータは、測定値として確定した値のままで、以下のブロックに引き渡される。

３．２ 量子化部（ｑｕａｎｔｉｚａｔｉｏｎ ｂｌｏｃｋ）

ここでは、（１）観測部で抽出された確定値情報（測定値）をもとに、誤差等を考慮してあいまい情報へと拡張する。

物体の速度は、連続的にゆっくりと常に変化をしているようなモデルを考えている。また、ハンドと物体間の距離も、物体が移動しているので常に変化している。このこ

とから、測定誤差を無視したとしても、入力画像からの情報にあいまいさが含まれることになる。ここでは実時間のフィードバックをかけるわけではないので、およそ現時点におけるおよその状態を知ればよい。（実時間のフィードバックの場合には現時点での状態が必要と考えた方が妥当と思われる。）

あいまい情報としての物体速度（V^0）について、まず測定値を2で述べた規格化した台集合｛0，1，・・・，14｝の要素へ写像する。この写像では、あらかじめスケーリングファクタを与えておく。ここで、物体速度の測定値を求める時（（3．1）式）に必要であった、2回の観測の時間間隔Δtが小さいものであれば、この時観測された速度vの信頼性はかなりあやしいものとなる。また、たとえΔtが十分大きくとられていたとしても、急激に速度が変わることは無いので、以前の速度のデータ情報もある程度現在の速度に反映させた方が良いと思われる。そこで、時間間隔Δtが短い場合は、今回写像された要素のmembership値を0．8にし、他の要素の値は前回のその値の9割とした。また、時間間隔が十分にとられている場合は、今回写像された要素のmembership値を1．0にし、他の要素の値は今回の値の6割とした。

あいまい情報としてのハンドと物体間の距離（L^0）についても、まず測定値を2で述べた規格化した台集合｛0，1，・・・，16｝の要素へ写像する。これも、スケーリングファクタをあらかじめ与えておいて行なう。

ここでハンド－物体間の距離の意味を考察してみよう。3．1で求めた測定値は、確定値であった。しかし、今必要なのは、ハンドと物体間の距離概念である。例えば同じ距離であっても、物体の進行方向にハンドがあるのなら、進行方向逆側にある場合よりも近いと考えるべきである。そこで、物体の進行方向先にハンドがある場合、写像した要素のmembership値を0．6に、1つ小さい（より近い）要素のmembership値を1．0に、更にそれより1つ小さい要素の値を0．4にした。ハンドが物体付近にある場合は、写像された要素のmembership値を1．0に、1つ小さい要素と、1つ大きい（より遠い）要素の値を0．5にした。ハンドが物体より手前（進行方向逆側）にある場合は、写像された要素のmembership値を0．2に、それより1つ大きい要素の値を1．0に、更に1つ大きい要素の値を0．5にした。

通常ファジィ制御においては、非ファジィ数として簡単化をする場合が多いが、ここでは、このようにして、推論に用いられる情報にあいまいさの概念を十分に反映させている。

3．3　推論部（inference　block）

ここでは、（2）量子化部で求めた2つのあいまい情報（V^0，L^0）をもとにして、（2－3）式により制御出力（P^0）の推論を行ない、更にvagueness値の決定も行なう。

既に2で述べたように、24個の命題（制御規則）により、関係Rを求めておき、（2－3）式により、制御出力（P^0）の推論を行なう。制御出力（P^0）は勿論あいまい変数として出力されるわけであり、どのあたりにハンドを持っていったら良いかという情報としてとらえる。

推論された結果（P^0）の確実さを考慮するための要因としてvaguenessの概念を導入することについては、既に2．2で述べた。このvagueness値の決定は、2状態（V^0，L^0）により、あらかじめ与えておいたvagueness map　から直接求めることも前述の通りである。

ここでは、（2）量子化部で求めたV^0，L^0を、あいまいラベル（V_1～V_4，L_1～L_6）におきかえ、表3に示したvagueness map により直接求めた。

3．4　解釈部（interpretation　block）

ここでは、（3）推論部で推論されたあいまい出力（P^0）とvagueness値をもとにして、確定数への解釈変換を行なう。

確定数への解釈変換では、まずP^0を実際の距離に解釈変換してから座標値に変換する。次に、vaguenessを考慮して、実際にハンドを移動させる座標を計算する。

あいまい出力P^0から確定数への解釈変換としては、重心をとる方法（center of gravity　法）を採用した。座標値への変換には、物体の移動方向が1次元であること

を利用して行なう。
　必ずしも求められた座標へハンドを移動するのではなく、その途中で止め再度推論を行なう場合もあり、どの時点でハンドを止めるかを決定づける要因として、vagueness値を用いた。具体的には、（３）推論部で求められたvagueness値を１からいた割合まで動作することにした。つまり、vagueness値が０．３であれば、指定の７０％の行程まで移動させ、vagueness値が１．０であれば、確定された座標までハンドを移動させてやる。

３．５　（ロボット）制御部（（ｒｏｂｏｔ）　ｃｏｎｔｒｏｌ　ｂｌｏｃｋ）
ここでは、（４）解釈部で求めた座標までハンドを移動させる。

３．６　把握部（ｃａｔｃｈｉｎｇ　ｂｌｏｃｋ）
　ここでは、推論する必要がない程度にハンドが物体まで近づいた場合、実際に物体を把握する動作を実行する。
　人間が移動する物体を把握する場合、まずある程度手を物体まで移動させてやる。この行動は既に、（１）～（５）のブロックにおいて実現している。人間の場合ここで、少しの間移動物体を追従し、頃合を見計って物体を把握していると思われる。ここでも、このような手法をロボットシステムで実現することにした。
　（１）～（５）のブロックにおいて、ハンドが物体付近に誘導されたら、現在の物体位置の少し先にハンドを移動させてやる。つまり、この位置で物体が流れてくるのを待つわけである。実時間で物体の座標を求め、ハンドの真下に来た時点でハンドを下して、物体を掴み取る。

４．移動物体把握ロボットシステム

　画像センサから得られるあいまい速度、距離情報をもとにして、可変速度のベルトコンベア上を流れる、移動物体を掴み取るロボット制御システムを構築した。このシステム全体の構成を図１に示す。システムは、５自由度の垂直多関節型ロボットアーム三菱製ＲＭ５０１（ムーブマスター II）２台、ＩＴＶカメラ１台、２５６ｘ２５６画素で、各画素を６４階調（６ｂｉｔｓ）の濃淡で表示可能な画像処理装置ｅｄｅｃ（社）製ＥＤ－１１６１（ＩＭＡＧＥ　ＰＣ）及びカメラの画像を表示する画像モニター、そしてロボット及び画像装置に接続されロボットの制御及び各種処理を行なうＮＥＣ製ＰＣ－９８００シリーズマイクロコンピュータシステム（キーボード、モニター、ディスク装置を装備）から成る。また、物体は可変速度産業用ミニベルトコンベア（三和コンベア（株）製）により、移動される。
　ロボットアームのうち１台は、移動物体を把握するためのものであり、もう１台は、カメラの台座として利用する。ベルトコンベア（作業領域）全体を１度にカメラで撮らえるのは精度の点でも問題が生じるので、ベルトコンベアの１部が映るようにカメラを設定し、コンベア上の物体が映るようにカメラを移動させてやる。このロボットは数値制御により動作させるので、カメラとベルトコンベアの位置関係は簡単に計算できる。

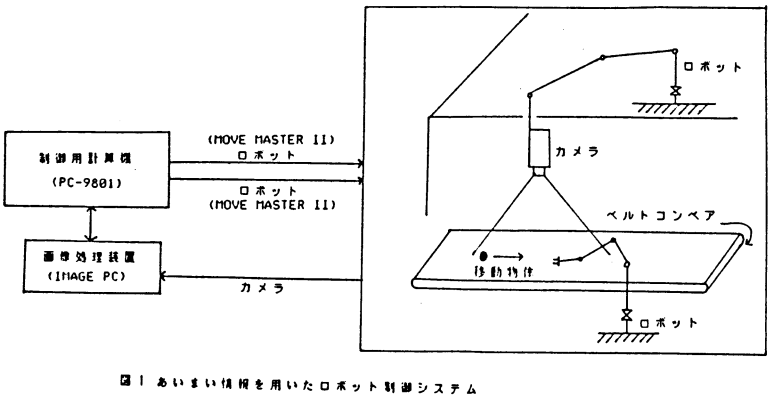


図１　あいまい情報を用いたロボット制御システム

実際のプログラムは、２，３で述べた方法に基づきＮ８８－日本語ＢＡＳＩＣ（ＭＳ－ＤＯＳ版コンパイラ）及び、アセンブラ言語で作成した。アセンブラ言語は、画像処理ルーチンや、推論部で使用し、高速化をはかっている。通常ファジィ制御では推論の際に簡単化を行ない高速化をはかるが、ここでは、あいまいさをより忠実に扱うものとし、この意味で簡単化は行なわず、代りにアセンブラ言語を用いて高速化をはかった。

５．おわりに

ロボットが自ら必要な全情報を画像処理により求め、ファジィ制御によりロボットを制御し、ベルトコンベア上を流れる可変速度の移動物体を把握するシステムを構築した。また、従来のmembershipと共にvagueness概念をも導入した。

必要となる情報はあいまいでよく、正確さを追及するために時間を費す必要もなく、比較的低レベルの入力装置、制御装置でも実現可能となった。また、何回かの段階（アプローチ）が必要ではあるが、柔軟性は増し、アルゴリズムも人間指向型の理解しやすいものとなった。更に、あいまいさを扱う上でvagueness概念を導入することにより、より柔軟な人間指向型のあいまい制御が実現できた。今後、遠隔操作等でのロボット制御における、知能化の１つの指針を与えるものといえる。

また、今回はmembership, vagueness値を含めたパラメータは固定され、移動物体の動きも１次元に限定した。これらに対し、学習を取り入れたり、２，３次元の動きにまで対応させるのが今後の課題である。尚、センサ付移動ロボットにここで述べた手法を方法を応用した研究[8]もすすめている。

参考文献

1) Zadeh :Outline of a New Approach to the Analysis of Complex System and Decision Processes ; IEEE Trans. SMC-3, pp28/44 ,1973

2) Mamdani,Assilian :A Case Study on the Application of Fuzzy Set Theoty to Automatic Control ; Proc. IFAC Symp. on Stochastic Control ,1974

3) 山崎,菅野 :自動学習ファジーコントローラ ; 計測自動制御学会 vol.20 No.8 pp720/726 ,1984

4) Larsen :Industrial Application of Fuzzy Logic Control ; Man-Machine Studies, 12, pp3/10 ,1980

5) 安信,宮本,井原 :予見Ｆｕｚｚｙ制御方式による列車自動運転 ; システムと制御, Vol.28, No.10, pp605/613, 1984

6) Hirota,Arai,Pedrycz :Robot Control Based on Membership and Vagueness ; Approximate Reasoning in Expert Systems, North Holland (to appear in 1985)

7) 廣田,荒井,池津 :画像からのあいまい情報を用いたロボット制御 ; 法政大学工学部研究集報, Vol.21, pp55/76, 1985

8) 廣田 :あいまい制御知能ロボット ; マグロウヒルブック, (1985予定)

9) Sugeno,Nishida :Fuzzy Contrl of Model Car ; あいまい制御の応用に関する研究, 科研費報告書（東工大）,1985

10) 寺野,増井 :Ｆｕｚｚｙロボットに関する研究 ; 第３回知識工学シンポジウム資料, pp137/142, 1985

11) Hirota :Extended Fuzzy Expression of Probabilistic Sets ; Advances in Fuzzy Set Theoty and Applications, North Holland, pp201/214, 1979

12) Czogała :Probabilistic Sets in Decision Making and Control ; Verlag TÜV Rheinland, 1984

あいまい制御を用いたアーク溶接ロボットの制御

九州工業大学　　村上周太　竹本文人
三菱重工業　　藤村浩史　井手栄三

1．まえがき

さまざまな生産分野で自動化が推進されつつある中で、近年最も注目され急速に展開されつつあるのが、アーク溶接作業用ロボットである。周知の通り、環境性、安全性の面で条件が悪く過酷であり、また若干の熟練を要する特殊作業であるため、労働力不足を起こしている分野である。

従来、アーク溶接ロボットは、ティーチング・プレイバック方式、つまりロボットアームに人間が、溶接動作を教え込む方法を行ってきたが精度が悪い、ティーチングに手間がかかるなどと種々の問題点があった。これを解決するために、本研究ではこのアーク溶接ロボットに、溶接線センシング機能をもたせ、その中で最も実用的なアークセンサ方式を取り入れ、またFuzzy Logic Controller（ＦＬＣ）を用いることにより、溶接線をロボット自身が検知し追従していく制御系を開発する。またアークセンサ方式においては、２つの方式についてシミュレーションを行いその有効性を比較検討する。

2．アークセンサの作動原理

アークセンサの作動原理の概要図を図１に示す。左図は、丸印の部分の拡大図とチップ・母材間距離（Ｌ）を求める演算フローチャートである。

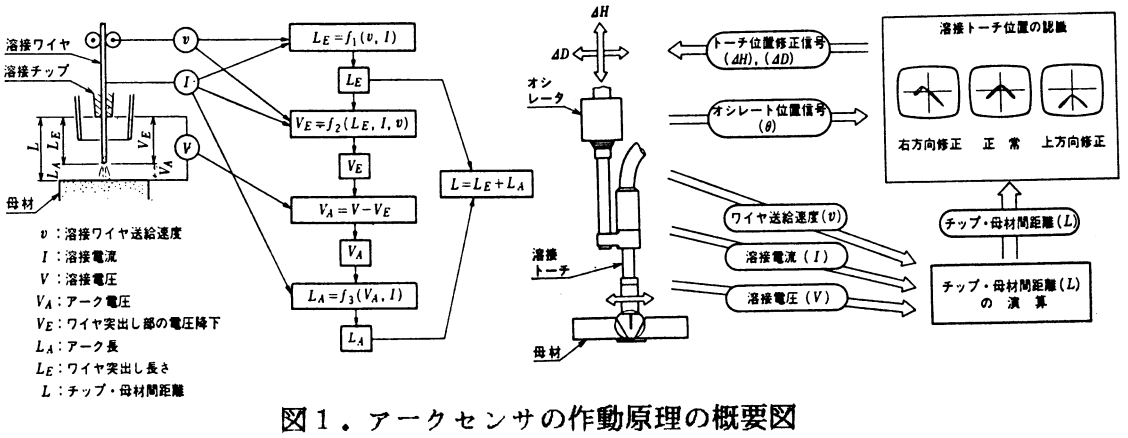


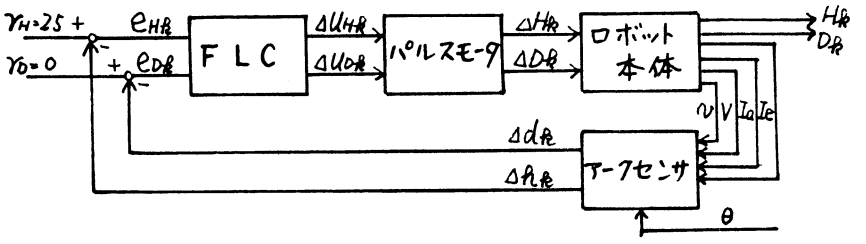
図１．アークセンサの作動原理の概要図

このアークセンサの作動原理は、溶接電流（Ｉ）、溶接電圧（Ｖ）、ワイヤ送給速度（ｖ）を測定することによってチップ・母材間距離（Ｌ）を求める。それと同時に、溶接開先を横断する方向に溶接トーチを振動（オシレート）させ、オシレート位置（θ）とチップ・母材間距離（Ｌ）の関係を求めてやれば、開先形状に起因したパターンを得ることができ、溶接トーチ位置修正量ΔＤ、ΔＨを判断することができる。従って、この溶接トーチ位置修正量ΔＤ、ΔＨにより、溶接トーチを上下左右に移動させることができる。

3．溶接線追従制御系の構成

図２に、本研究の制御系である溶接線追従制御系の構成図を示す。
この制御系は、２入力２出力系でありr_HからΔh_{ℓ}のラインが垂直制御系、r_DからΔd_{ℓ}のラインが水平制御系である。パルスモータ及びＦＬＣは、それぞれ垂直、水平用２つが用意されている。

r_H＝２５は、溶接チップから溶接点までの距離を２５mmにしようとする目標値であり、r_D＝０は、水平偏位を０mmにしようとする目標値である。この目標値から制御量Δh_{ℓ}、



k：時刻
r_H, r_D：目標値
e_{Hk}, e_{Dk}：制御偏差
$\Delta u_{Hk}, \Delta u_{Dk}$：パルス数
$\Delta H_k, \Delta D_k$：溶接トーチ位置修正量
H_k, D_k：移動位置
$\Delta h_k, \Delta d_k$：制御量
v：ワイヤ送給速度
V：溶接電圧
I_a：平均電流
I_e：実効電流
θ：オシレート位置信号

図２．溶接線追従制御系の構成図

Δd_k を引いたものが制御偏差 e_{Hk}、e_{Dk} であり、これがＦＬＣにはいると、それぞれ垂直、水平パルス数 Δu_{Hk}、Δu_{Dk} が求められる。この Δu_{Hk}、Δu_{Dk} がパルスモータにはいると、パルス数に応じた移動量、つまり溶接トーチ位置修正量が求められ、これによって溶接トーチの位置が修正される。H_k 、D_k は、溶接トーチの移動後の位置を示す。ロボット本体において、溶接電流（平均電流(I_a）、実効電流(I_e)）、溶接電圧（Ｖ）、ワイヤ送給速度（ｖ）が測定されアークセンサにはいると、チップ・母材間距離（Ｌ）がこれらの測定値から求められ、同時にオシレート位置信号（θ）を外部から入力することによりθ－Ｌパターンを描く。よって、このθ－Ｌパターンから制御量 Δh_k 、Δd_k が求められフィードバックされる。

４．１次元２変数ＦＬＣの設計[2),3),4),5)]

この章では、前章で示した溶接線追従制御系の構成図を基に、２入力２出力系の１次元２変数ＦＬＣの設計手法を示す。

時刻ｋにおける制御量 Δh_k 、Δd_k 、操作量 u_{Hk}、u_{Dk}、目標値 r_H 、r_D とし入力データとして、

垂直側：　$e_{Hk} = r_H - \Delta h_k$　：制御偏差
　　$\Delta e_{Hk} = e_{Hk} - e_{Hk-1}$　：制御偏差の変化分
水平側：　$e_{Dk} = r_D - \Delta d_k$　：制御偏差
　　$\Delta e_{Dk} = e_{Dk} - e_{Dk-1}$　：制御偏差の変化分

を用いてコントローラの設計を行う。

本制御系では、言語的制御規則（ＬＣＲ）を次のようにする。

LCR-1	IF	e_{Hk}	is	P_E	THEN	Δu_{Hk}	is	P_1
LCR-2	IF	e_{Hk}	is	N_E	THEN	Δu_{Hk}	is	N_1
LCR-3	IF	Δe_{Hk}	is	P_{CE}	THEN	Δu_{Hk}	is	P_2
LCR-4	IF	Δe_{Hk}	is	N_{CE}	THEN	Δu_{Hk}	is	N_2
LCR-5	IF	e_{Dk}	is	P'_E	THEN	Δu_{Dk}	is	N'_1
LCR-6	IF	e_{Dk}	is	N'_E	THEN	Δu_{Dk}	is	P'_1
LCR-7	IF	Δe_{Dk}	is	P'_{CE}	THEN	Δu_{Dk}	is	N'_2
LCR-8	IF	Δe_{Dk}	is	N'_{CE}	THEN	Δu_{Dk}	is	P'_2

LCR 中の記号Ｐ、Ｎは、それぞれPositive、Negativeを表し、Δu_{Hk}、Δu_{Dk} は、それぞれ操作量の変化分を表す。また添字H,D は、それぞれ垂直、水平を表している。尚、relationは、す

べてtrueとする。LCR1-4においてe_{Hk}、Δe_{Hk}よりΔu_{Hk}を推論し、 LCR5-8においてe_{Dk}、Δe_{Dk}よりΔu_{Dk}を推論する。

LCR1-2によって、垂直側の制御偏差e_{Hk}による操作量のFuzzy 集合を算出する方法を例にとって簡単に説明する。メンバーシップ関数を次のように設定する。

(1) 入力側のP_E 、N_E には、次のようなメンバーシップ関数を与える。

$$\mu_{PE}(e_{Hk})=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(a_1\cdot e_{Hk})+0.5 \quad \text{-------(1)}$$

$$\mu_{NE}(e_{Hk})=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(-a_1\cdot e_{Hk})+0.5 \quad \text{--------(2)}$$

但し、a_1 は、パラメータである。

$e_{Hk}=R_1$ の時、$\mu_{PE}=0.95$とすると、

$$a_1=\frac{\tan(0.45\pi)}{R_1}=\frac{6.3175}{R_1} \quad \text{-------(3)}$$

となる。

(2) 出力側のP_1 、N_1 には、次のようなメンバーシップ関数を与える。

$$\mu_{P1}(\Delta u_{Hk})=\frac{1}{2b_1}\cdot\Delta u_{Hk}+0.5 \quad \text{--------(4)}$$

$$\mu_{N1}(\Delta u_{Hk})=-\frac{1}{2b_1}\cdot\Delta u_{Hk}+0.5 \quad \text{--------(5)}$$

但し、b_1 は、パラメータである。

図3、図4に、それぞれ入力側、出力側のメンバーシップ関数を与える。

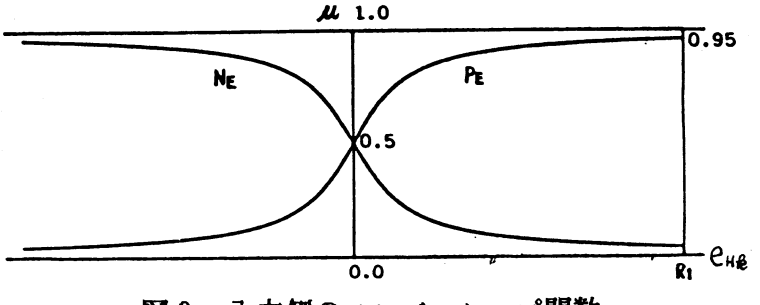


図3．入力側のメンバーシップ関数

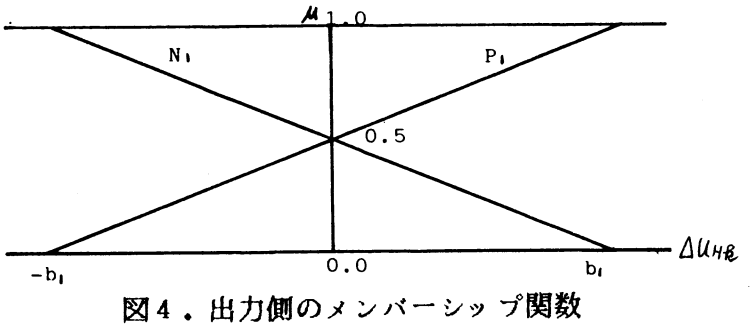


図4．出力側のメンバーシップ関数

次に、Truth Qualification (TQ)、Converse of Truth Qualification (CTQ)、Fuzzy Modus Ponensの手順を経て操作量Δu_{Hk}を求める。

$$\Delta u_{Hk}=\frac{2b_1\cdot b_2}{\pi(b_1+b_2)}\cdot\left\{\tan^{-1}(a_1\cdot e_{Hk})+\tan^{-1}(a_2\cdot\Delta e_{Hk})\right\} \quad \text{--------(6)}$$

同様にして、水平側の操作量Δu_{Dk}を求める。

$$\Delta u_{Dk}=\frac{-2b_3\cdot b_4}{\pi(b_3+b_4)}\cdot\left\{\tan^{-1}(a_3\cdot e_{Dk})+\tan^{-1}(a_4\cdot\Delta e_{Dk})\right\} \quad \text{--------(7)}$$

但し、a_i 、b_i (i=1～4)は、パラメータである。

5．シミュレーション

第2章で、アークセンサの作動原理の概要を述べ、溶接電流、溶接電圧、ワイヤ送給速度を測定することによりチップ・母材間距離を求めていたが、本シミュレーションでは、これを幾何学的に求め代用している。

5.1. 溶接動作条件と母材の設定

本シミュレーションにおける溶接動作条件と母材の設定を示す。

(1) 溶接動作条件の設定

・オシレーション機能の設定

オシレート幅……2mm

サイクルタイム（周期）……0.725s

・溶接速度……10mm/s

(2) 母材の設定

図5、図6、図7に、母材の断面図、水平面図、垂直面図を示す。

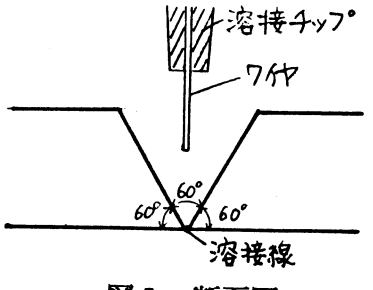


図5．断面図

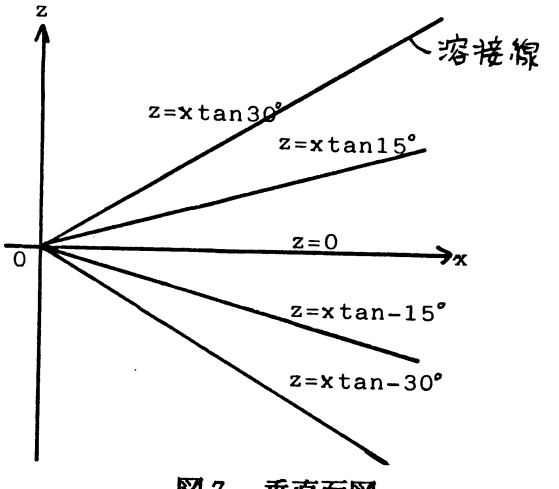


図7．垂直面図

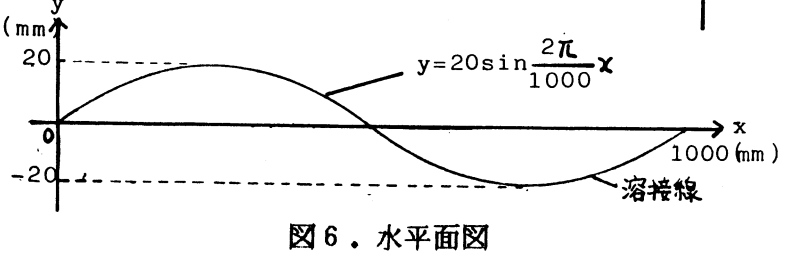


図6．水平面図

5.2. Δd、Δhの定義式

本シミュレーションでは、2つのアークセンサ方式を用いており、それぞれアークセンサ1号機及び2号機と称する。

5.2.1. アークセンサ1号機

図8にθ－Lパターンの一例を示し、図9にオシレート位置信号θの測定位置を示す。

Δd、Δhの定義式を次式に示す。

$$\Delta d=(L_R-L_L)-S_1 \quad \text{--------(8)}$$

$$\Delta h=\frac{L_{R25}+L_{R75}+L_{L25}+L_{L75}}{4}+S_2 \quad \text{--------(9)}$$

S_1 は、垂直偏位が水平偏位に及ぼす影響を修正してやる項、またS_2 は、シミュレーション結果より求めた修正項である。S_1 、S_2 は、次式のようにした。

$$S_1 = L_R' - L_L' - 0.15 \text{ --------} (10)$$

$$S_2 = -0.5 \times st + 0.9 \text{ --------} (11)$$

$$st = \frac{(L(1)-L(4))+(L(5)-L(8))}{2}$$

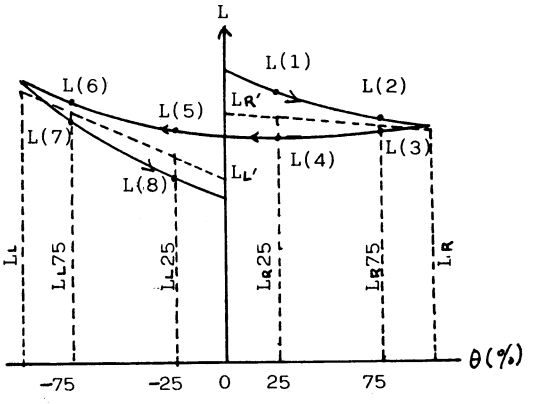


図８．θ－Ｌパターン

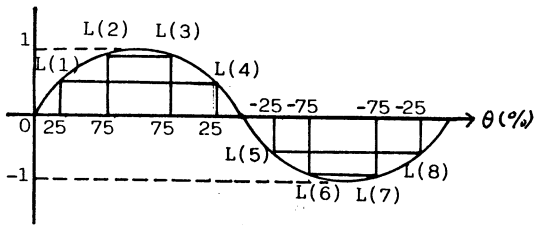


図９．θの測定位置

5. 2. 2. アークセンサ２号機

図１０にθ－Ｌパターンの一例を示し、図１１にオシレート位置信号θの測定位置を示す。

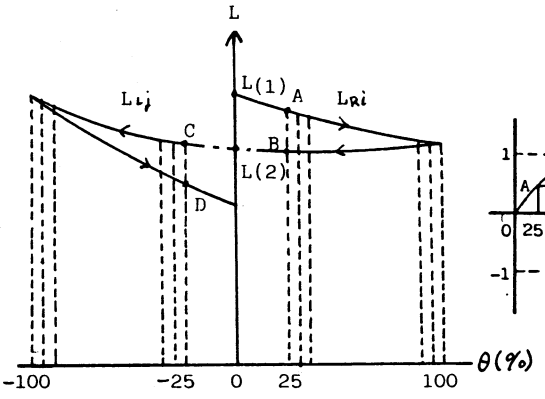


図10．θ－Ｌパターン

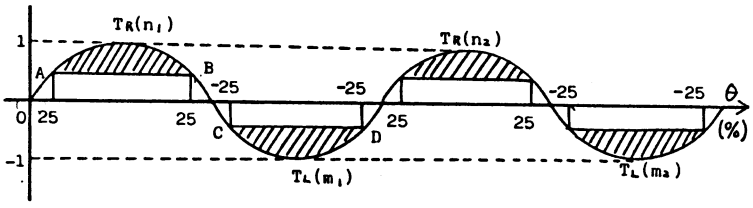


図11．θの測定位置

T_R 、T_L は、測定箇所であり、n=m=31サンプルした。

$$T_R = \sum_{i=1}^{m} L_{Ri} \quad , \quad T_L = \sum_{j=1}^{m} L_{Lj} \text{ ------} (12)$$

Δｄ、Δｈの定義式を次式に示す。

$$\Delta d_1 = \frac{T_{R1}}{31} - \frac{T_{L1}}{31} \quad , \quad \Delta h_1 = \frac{\frac{T_{R1}}{31} + \frac{T_{L1}}{31}}{2} + S_3 \text{ -------} (13)$$

$$\Delta d_2 = \frac{T_{R2}}{31} - \frac{T_{L1}}{31} \quad , \quad \Delta h_2 = \frac{\frac{T_{R2}}{31} + \frac{T_{L1}}{31}}{2} + S_3 \text{ --------} (14)$$

$$\Delta d_3 = \frac{T_{R2}}{31} - \frac{T_{L2}}{31} \quad , \quad \Delta h_3 = \frac{\frac{T_{R2}}{31} + \frac{T_{L2}}{31}}{2} + S_3 \text{ -------} (15)$$

このようにアークセンサ２号機は、１号機が１周期おきに位置修正を行っていたのに対して、半周期おきに位置修正を行っている。またS_3は、S_2と同様にシミュレーション結果より求めた修正項であり、次式のようにした。

$$S_3 = 1.8 \times st - 2.2 \cdots\cdots\cdots (16)$$
$$st = L(1) - L(2)$$

5.3. シミュレーション結果

シミュレーション結果には誤差平均、誤差分散、最大絶対値誤差（シミュレーション時間の最初の８分の１時間を除く。）を示し、表１にアークセンサ１号機、表２にアークセンサ２号機の結果を示している。尚、ＦＬＣのパラメータについては、定義式の修正項を用いることにより、垂直偏位の変化に関係なく１つに統一することができた。

表１．アークセンサ１号機

		誤差平均(mm)	誤差分散(mm^2)	最大絶対値誤差(mm)
30°	水平	-0.1131	0.1601	0.73
	垂直	-0.0142	0.1176	0.84
15°	水平	-0.1061	0.1837	0.66
	垂直	0.1178	0.1071	0.84
0°	水平	-0.0974	0.1979	0.70
	垂直	-0.0071	0.0781	0.72
-15°	水平	-0.1061	0.1837	0.62
	垂直	-0.0531	0.0981	0.91
-30°	水平	-0.1120	0.1603	0.73
	垂直	0.3551	0.2443	1.03

表２．アークセンサ２号機

		誤差平均(mm)	誤差分散(mm^2)	最大絶対値誤差(mm)
30°	水平	0.0010	0.0081	0.16
	垂直	0.0994	0.3017	0.60
15°	水平	-0.0010	0.0130	0.12
	垂直	0.1561	0.1727	0.71
0°	水平	0.0005	0.0146	0.18
	垂直	-0.1546	0.1401	0.89
-15°	水平	-0.0016	0.0136	0.16
	垂直	-0.2956	0.2202	1.07
-30°	水平	-0.0045	0.0156	0.12
	垂直	0.3301	0.3158	0.81

6．あとがき

本研究では、アーク溶接ロボットにＦＬＣを用いて、溶接線を自ら検出していく制御系を構成した。また、この制御系の有効性を検討するため、シミュレーションを行い、その結果、アークセンサ１号機及び２号機共に垂直偏位が大きくなれば誤差も大きくなるが、ほぼ許容範囲におさめることができた。しかし、本研究においては溶接母材が単調であるため、その有効性は、はっきりしないが、ＦＬＣを取り入れることにより、その制御が可能であることがわかった。

今後は、定義式の修正項をもっと適したものに変え、またパラメータの調整も行い、過酷な母材にも対応できるように改善していく必要がある。

参考文献

1）藤村浩史、井手栄三他：”アーク溶接ロボット用溶接線検知センサの開発”，三菱重工技報 Vol.20 No.6 (1983.11)

2）管野道夫：”あいまい集合と論理の制御への応用”，計測と制御Vol.18 No.2 8-18(1979)

3）Murakami S.: Application of fuzzy controller to automobile speed control systems, Proc. of the IFAC Symposium on Fuzzy Information knowledge Representation and Decision Analysis, Marseille (1983) P43-48

4）前田，村上他：”Fuzzy Logic コントローラによる自動車の速度制御”，第９回システムシンポジウム講演論文集，P7-11 (1983)

5）前田，村上他：”Fuzzy Logic コントローラの設計”，九州工業大学研究報告（工学） No.49 P43-51 (1984)

ある手動制御系において定常不規則入力における オペレータのFuzzy Model の構成

松島皓三　筑波大学構造工学系
軍司章弘　筑波大学理工学研究科

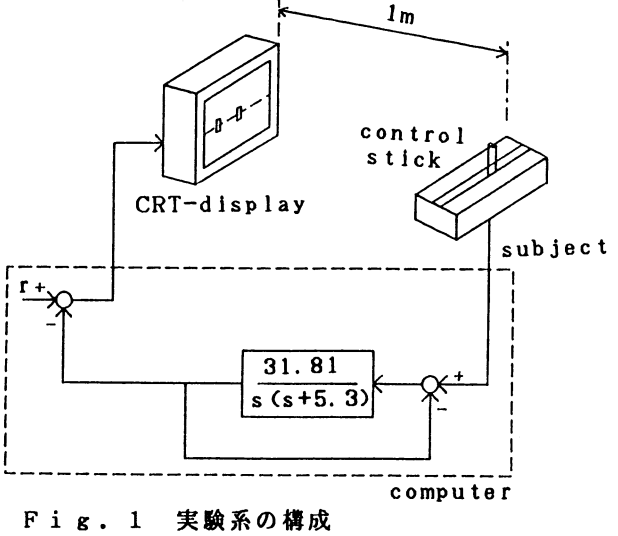
１．まえがき

筆者らはすでに、手動制御系におけるステップ入力に対するオペレータの制御動作を Fuzzy論的に解析し、トルク飽和を持つサーボ系〔1〕および不感帯＋積分器〔2〕を制御対象とした場合について、オペレータのあいまい規則によるモデルを構築した。これらは、与えられた制御対象に対する被験者の制御動作の実験値より、その特徴量を抽出し、それらと制御偏差ならびにその速度との関係を示すオペレータのあいまい制御則を言語表現によって導き、その妥当性を導出したあいまい制御則を用いたシミュレーションによって確認している。

本報では、制御対象として２次のサーボ系を選び、定常不規則信号を目標値とした場合のオペレータの制御則を、前と同様な手法により推定した結果について述べる。

２．実験系の構成と実験要因

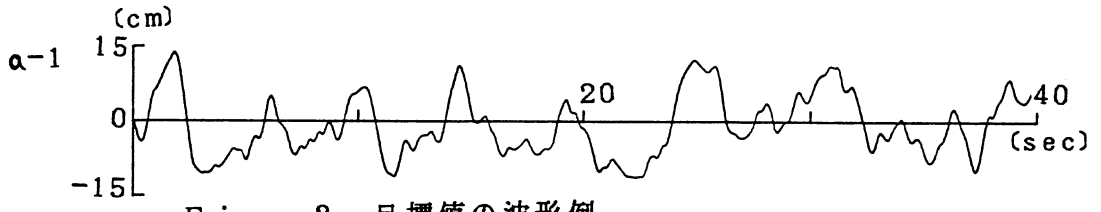
実験系はFig.１に示すように被験者は操作端を左右に動かすことにより、CRT 上に表示された制御偏差を零に近づけるような操作による compensatory trackingを行なう。ここで制御対象である２次のサーボ系は、マイクロコンピュータでシミュレートし、そのパラメータは図に記したものにセットした。実験要因は、Table １に示すように、被験者２名、目標値は、帯域幅３水準、振幅のrms.値３水準である。各被験者は、目標値の各水準の９個の組み合わせについて、ランダマイズされた10回の繰り返し実験を行なった。また、１回の実験は、40秒間であり、実験データとしては、操作がほぼ定常に達したと見られる実験開始から15秒経過してからの20秒間のデータを用いた。目標値の波形例を Fig.2に示す。目標値の振幅は、CRT 上の長さで示してある。



Ｆｉｇ．１　実験系の構成

Ｔａｂｌｅ１　要因表

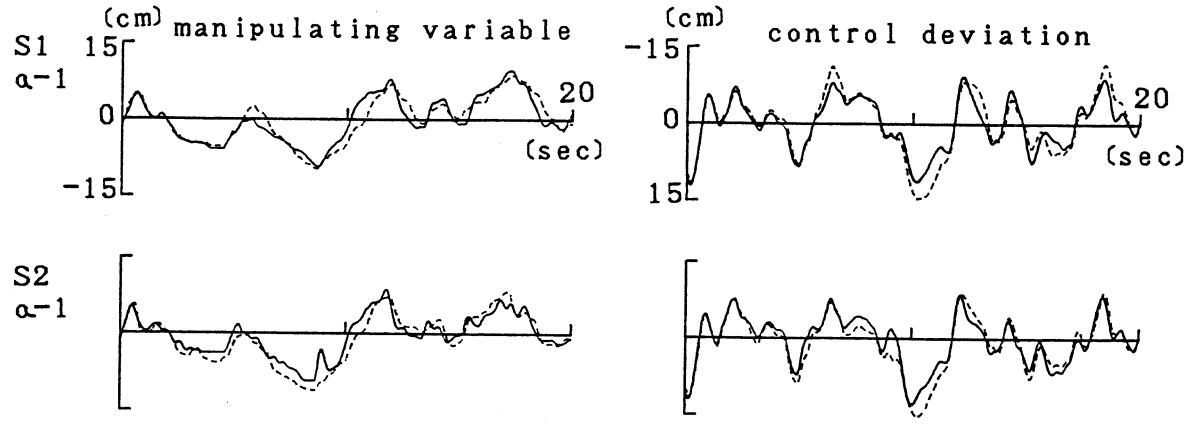
被験者	S1　S2
帯域幅	a　0.4 Hz b　0.2 Hz c　0.1 Hz
振幅rms.	1　6.2 cm 2　3.1 cm 3　1.6 cm



Ｆｉｇ．２　目標値の波形例

３．実験データよりあいまい制御則の導出

ここで、オペレータは、CRT 上に表示される制御偏差とその速度に着目して操作量を出力している、かつ操作量を定める時点は、離散的であり、その時間間隔は制御偏差とその速度に依存するという仮定をおく。



Ｆｉｇ．３　実験データ例　　——— exp.　－－－ sim-1

実験データの一例をFig.3 に示す。上の仮定に基づいて、オペレータが操作量を出力する時点は、主として操作量の極値あるいは変曲点となって現われるとして、その時点での操作量の増減を制御偏差、偏差速度と共に示した例が Fig.4である。ここで、＊印は、操作量を増した状態、Δ印は、減じた状態、○印は、操作量を動かさずに保持していることを示している。ただし、制御偏差速度の正負は、制御動作を見やすくするため、制御偏差が零に向かう方向を正、遠ざかる方向を負としてある。実験データと Fig.4を観察すると、オペレータの制御動作として、次のことが推察される。

Fig.4の第１象限については

(1)　制御偏差が大であれば、操作量を大きく増やす。

(2)　偏差速度が大であれば、操作量を大きく減ずる。

(3)　偏差、偏差速度が中位のとき、操作端を動かさず操作量を保持している領域がある。

(4)　偏差、偏差速度共に小さいときには、操作量をわずかに増やす。

(5)　偏差、偏差速度が零近傍では操作端を止めておく。

第２象限では、操作量の向きが逆になるだけで、第１象限と同様な操作を行なっている。

第３、４象限では、当然のことながら、偏差が増大する方向（偏差速度が負）な

ので、いずれも、偏差を小さくするように操作量を増減させている。
また各操作の時間間隔は、操作量を大きくとるときに長い。

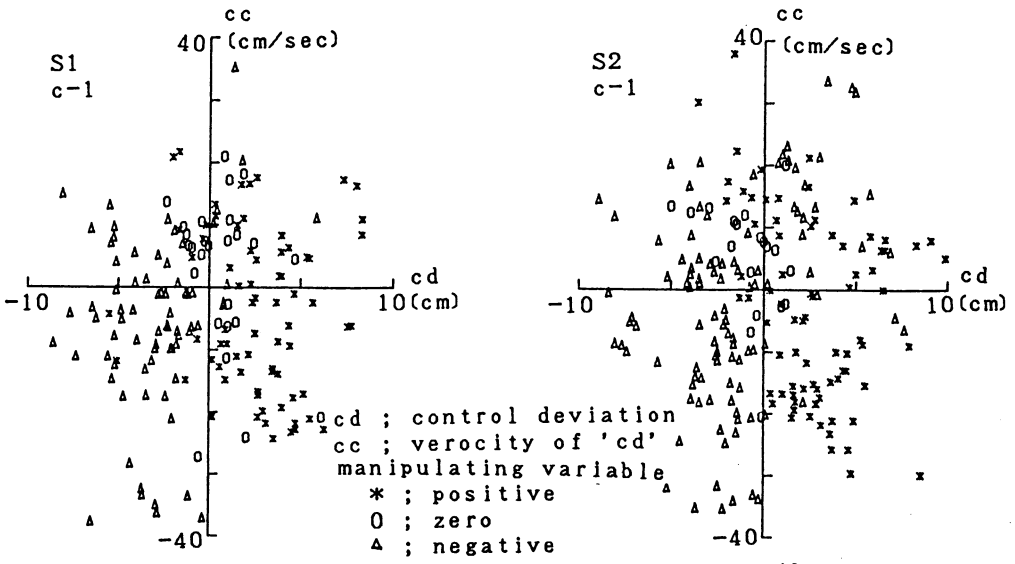


Fig. 4 制御偏差、偏差速度と操作量の関係

以上の考察からオペレータの制御則を次のように推定した。

(1) if cd=PB then uc=PB , sd=B
(2) if cc=PB then uc=NB , sd=B
(3) if cd=PM and cc=PM then uc=Zr , sd=S
(4) if cd=PS and cc=PS then uc=PVS , sd=S
(5) if cc=NB then uc=PB , sd=B
(6) if cd=PS and cc=NS then uc=PS , sd=S
(7) if cd=PZ and cc=Z then uc=Zr , sd=S

cd ; control deviation
cc ; velocity of 'cd'
uc ; increment of tentative command
sd ; sampling dulation

B ; Big P ; Positibe
M ; Medium N ; Negative
S ; Small V ; Very
Z ; Zero Zr; Zero (non-fuzy)

ここで、ucは各サンプル時刻での操作量の増分であり、実際の操作量はその時刻までのucの代数和として求められる。
制御偏差が負のときには、制御偏差と操作量の符号をP→Nに変更すればよい。

4．シミュレーション

3で求めた制御則に従って20秒間の実験データを基にシミュレーションを行ない、各変数の台集合、メンバーシップ関数の hedgeを推定した。アルゴリズムは、各

制御則は、各サンプル間隔における操作に対して、ひとつの規則が対応するようにORで結ばれている。

各あいまい集合のメンバーシップ関数は次のように定義している。

制御偏差cd、偏差速度cc、操作量の増分ucに関しては台集合を[0,X_0]、hedgeをhとして、ラベル B、VB、および Sについて

$\mu_B(x)=(x/X_0)^{h1}$ ， $\mu_{VB}(x)=\{\mu B(x)\}^2$ ， $\mu_S(x)=(1-x/X_0)^{h2}$

ラベル Mについては $0<Xm<X0$なるXmを用いて

$x \leqq Xm$のとき $\mu_M(x)=(x/Xm)^{h3}$

$x > Xm$のとき $\mu_M(x)=\{(X_0-x)/(X_0-Xm)\}^{h4}$

ラベル Zについて $\mu_Z(x)=(1-|x|/X_0)^{h5}$

としている。ラベルZRはあいまいさなしの通常の集合であって $x=0$で$\mu(x)=1$，$x \neq 0$で$\mu(x)=0$である。

サンプル間隔sdについては台集合を (X_1,X_0) として

$\mu_B(x)=\{(x-X_1)/(X_0-X_1)\}^{h6}$, $\mu_S(x)=\{(X_0-x)/(X_0-X_1)\}^{h7}$ とした。

ここで当然のことであるが、各あいまい集合について、hedgeの数値は異なる。

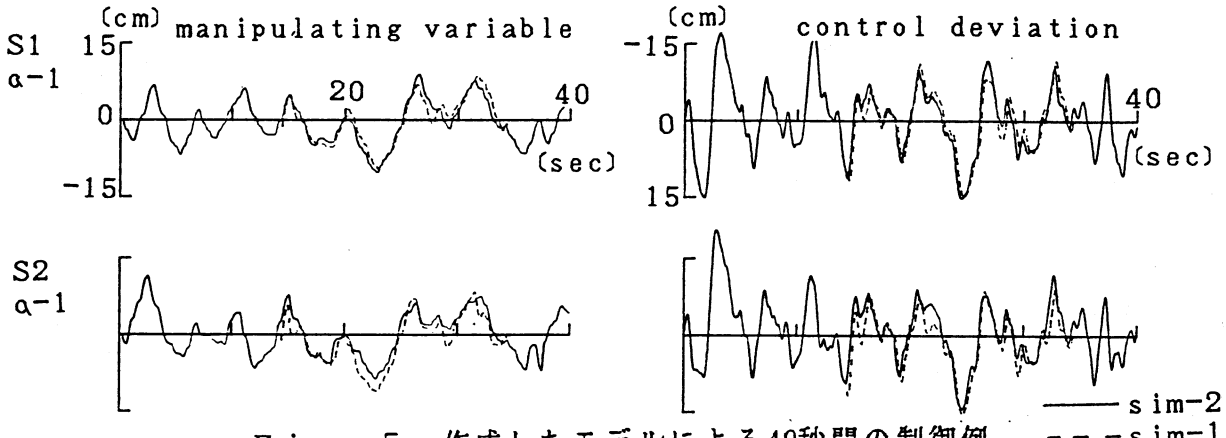
シミュレーションの結果の例を Fig.3の鎖線で示した。各パラメータの推定は、データ前半分約12秒で終了し、その後は求めたパラメータによって操作量を創成し出力している。

Ｔａｂｌｅ２　１回の試行で用いた各制御則の回数

制御則	1	2	3	4	5	6	7	計
S1 a-1	6	0	0	14	1	16	7	44
a-2	5	0	0	8	1	14	18	46
a-3	0	0	0	33	4	10	20	67
b-1	0	0	0	12	0	14	4	40
b-2	0	0	0	34	0	22	11	69
b-3	0	0	0	40	0	15	13	68
c-1	0	0	0	20	0	12	20	53
c-2	0	0	0	41	0	15	20	73
c-3	0	0	0	60	0	4	13	77
S2 a-1	5	2	7	10	4	18	0	46
a-2	0	0	5	16	3	11	22	57
a-3	0	0	2	31	2	10	23	68
b-1	4	0	5	13	1	25	0	48
b-2	6	0	5	18	4	10	8	51
b-3	3	0	3	16	0	17	18	57
c-1	3	0	5	28	0	25	0	61
c-2	1	0	1	26	0	13	28	69
c-3	3	0	0	44	0	4	6	57

Table 2 は、各被験者が、一回の試行中に用いた制御則の回数の例を示している。規則 (4),(6)および (7)は、他と比較して多く使用されている。このことは、この実験が compensatory trackingであり、被験者には、制御偏差のみが表示され、目標値の大きさを知らされていないため、CRT 画面の大きさ(410×315)と比較して小さいと知覚されるものと思われる。ここで、被験者S1における制御偏差の Small の hedgeは、平均 1.3、S2では 1.5であり、偏差速度の Smallについては夫々、1.0および 1.1であった。また、偏差および偏差速度のZeroの hedgeはS1で夫々、0.3、0.3 でありS2では 0.4、0.5 であり、Zeroについては、Nonfuzzyに近く知覚していることが言える。

ここでは前述のように、実験データは、実験開始より15秒経過した後の20秒間のデータについて制御則のパラメータを求めシミュレーションを行なったが、求めたオペレータのモデルの再確認の意味で次のようなシミュレーションを行なった。すなわち、求めたオペレータのモデルと、制御対象とよりなるフィードバック系を構成し、それに、モデルを構成したと同じ目標値を入力し、そのときの制御偏差および操作量を40秒間全域にわたって求めた。その例を Fig.5に示す。ここで鎖線部は、モデル構成に用いた20秒間データのシミュレーション結果であり（Fig.3 の鎖線に相当する）、時間を合わせて示してある。



Ｆｉｇ．５　作成したモデルによる40秒間の制御例

ついで、モデルの適合性の指標として、各変数のrms.値を求めTable 3 に示す。

ＴＡＢＬＥ３　モデルの適合性　（その１）　[rms. (cm)]

	目標値	a-1	a-2	a-3	b-1	b-2	b-3	c-1	c-2	c-3
操作量	S1 exp.	4.5	2.9	1.4	5.9	3.3	1.6	7.2	3.3	1.8
	sim-1	4.5	3.1	1.8	6.8	3.6	2.0	7.5	3.9	2.1
	sim-2	4.1	2.8	1.4	5.9	3.3	1.8	6.4	3.4	1.9
	S2 exp.	4.1	2.5	1.5	5.6	3.4	1.5	7.0	3.5	1.7
	sim-1	5.0	2.7	2.0	6.3	3.7	2.0	7.4	3.8	2.1
	sim-2	4.3	2.6	1.8	5.8	3.4	1.8	6.3	3.5	1.9

TABLE 3　モデルの適合性　（その２）　　[rms. (cm)]

	目標値	a-1	a-2	a-3	b-1	b-2	b-3	c-1	c-2	c-3
制	S1 exp.	4.9	2.4	1.3	4.0	1.8	1.1	1.9	1.0	0.4
	sim-1	6.0	2.8	1.4	4.4	2.1	1.2	1.8	1.0	0.6
御	sim-2	6.7	3.3	1.6	5.0	2.0	1.2	1.9	0.9	0.7
偏	S2 exp.	4.8	2.6	1.1	4.0	1.4	0.8	1.7	0.8	0.6
	sim-1	5.5	2.5	1.2	4.3	1.6	1.0	2.0	1.0	0.8
差	sim-2	6.2	2.9	1.3	3.6	1.6	1.0	2.2	1.1	0.9

ここで、表中、exp.は、実際のデータのrms.値であり、sim-1 は、モデル作成に用いた20秒間のシミュレーションにおけるrms.値，sim-2 は、モデルを用いた40秒間のシミュレーションにおけるrms.値である。

５．あとがき

本研究では、２次のサーボ系とオペレータとよりなる手動制御系において、定常不規則信号を目標値とする場合のオペレータのあいまい制御則を実験データを基に推定した。その際、筆者らがすでにステップ入力に対する場合で提唱している制御偏差、偏差速度平面上に操作量の増減をプロットすることにより、制御則が推定できるという方法がここでも適応し得ることを示した。これより推定した制御則の妥当性をシミュレーションにより確認し、定常な目標値では、実験データの一部のみを使用してモデルを構築できることを合わせ示した。今後は、被験者をさらに増し、被験者の個人差を同定する必要があり、これについては、ステップ入力の場合、各変数の台集合、メンバーシップ関数の hedgeによって有意の差が見いだせること〔2〕がすでに示されている。

参考文献

〔1〕 杉山、松島：飽和をもつ制御対象に対する Fuzzy Modelによる操作者の動作解析：計測自動制御学会論文集、20-7,621/626 (1984)

〔2〕 松島、杉山：不感帯をもつ制御対象の手動制御におけるあいまい制御モデルを用いた操作者の特性解析：計測自動制御学会論文集、21-5 (1985) (掲載予定)

特　別　講　演

機械化 → 自動化 → 情報システム化 → ハイ化 → [illegible]化

工作機	NC	INS	RT	[illegible]
土木機械	[illegible]	FA	ME	[illegible]
自動型		OA	[illegible]	
		C&C		

生産機械　　男子機械

なぜ

(1) ill defined の定式化

(2) 人間の意思決定支援 [illegible]

とうして

(1) 意思のあいまいさ

(2) 問題のあいまいさ

システム手法としてのファジィ集合

法政大学　　寺野　寿郎

1．システムに対する方法論

・well defined system（技術システム）：通常工学、数理計画
　分散制御、シミュレーション

・ill defined system（技術開発、生体、社会）：システム工学
　構造モデル、ファジィ集合論

2．システム問題に対する人間の思考

・論理的思考：ミクロ、狭範囲、深い、客観的、定量的、知識的、とくに将来予測や
　多変数問題に有効

・直観的思考：マクロ、総合的、浅い、主観的、定性的、非論理的、経験的、応答早
　く、パターン認識や総合判断に有効

・マクロな思考が行われた後、ミクロ思考に移る。

3．ファジィ集合のシステムへの利用

・利用分野
　大規模システムのマクロモデル、評価、設計、最適化
　人間の思考モデル、行動モデル、社会モデル、
　マン・マシン系のインターフェース、モデリング、評価、設計

　（例）　ロボット、制御、人工知能、エキスパートシステム、診断、CAD、
　　CG、分類、ゲーム、政策、行動・思考モデル、決定支援

・システムモデルとしてのファジィ集合
　変数、関数、モデリング、解釈

4．ファジィ数理計画

・線形計画、多目的計画、動的計画

・FDPの問題点：状態、制約、目標、推移、評価、選好、真理値、あいまいさの集
　約、時間尺度、アルゴリズム

5・意志決定支援

・暗示型インターフェース

・階層型ルール（ファジィ＋非ファジィ）

文献情報検索におけるファジィ検索要求の言語的アプローチ

村井哲也　宮腰政明　新保　勝　（北海道大学工学部）

１．まえがき

文献情報検索の分野において、Ｂoolean検索要求を構成する索引語や部分検索要求に要求式における重要度を示す数値を付与し、より柔軟な要求式を得ようとする研究がＢookstein[1]、Ｂuell and Ｋraft[2]等により展開され、ファジィ検索要求と呼んでいる。しかし、ユーザーは本来、検索要求を自然言語で考えているため、検索要求における重要度を数値ではなく、言語的な表現で示すほうがより自然であると考えられる。

一方、馬野ら[3]、Ｔahani[4]等はデータベース検索の分野において、YOUNG, OLD 等のファジィな述語を用いた検索、更にはＺadeh[5]が提案した言語ヘッジ VERY, MORE OR LESS等を導入した検索について扱い、より人間の感覚にあった手法を展開している。従って、文献情報検索の分野においても、言語的な手法の導入が考えられるものの、Ｓalton ら[6]が指摘するように、現在のところ言語的なアプローチはみられないようである。

本稿では、以上の観点に立ち、ファジィ検索要求の一つの方法として言語ヘッジの導入を試みる。

２．文献情報検索システムとファジィ検索要求

２．１　文献情報検索システム

文献情報検索システムを梶，新田[7]、Ｒadecki[8]等を参考にして次の七字組とする。

（Ｄ，Ｑ，Ｔ，ϕ，χ，ρ，Ｖ）

ここで、

Ｄ：文献の集合
Ｑ：質問（検索要求）の集合（自然言語による）
Ｔ：索引語の集合
ϕ：Ｄ→$\bar{D}$　索引付け関数（但し、$\bar{D}$：文献表現の集合）
χ：Ｑ→$\bar{Q}$　質問関数（但し、$\bar{Q}$：質問表現の集合）
ρ：$\bar{D}\times\bar{Q}$→Ｖ　検索関数
Ｖ：適合度の集合

である。

文献表現の集合は、各文献を索引付けした結果の集合である。本稿では、$\bar{D}$＝Ｆ（Ｔ）とする。すなわち、各文献を索引付け関数ϕによって索引語の集合上のファジィ集合として表現する。

質問関数χは、ユーザーの自然言語による検索要求をシステムが受理できる形（質問表現）に変換する機能を表わす。

検索関数ρは、質問と各文献の適合度を与えるものである。適合度の集合Ｖは、本稿では〔0,1〕閉区間とする。尚、通常のＢoolean検索では、｛0,1｝の二値の集合となる。

質問表現としてＢoolean要求式を考える場合、次のようになる。

・$t \varepsilon T \Rightarrow t \varepsilon \bar{Q}$
・$q \varepsilon \bar{Q} \Rightarrow$ NOT $t \varepsilon \bar{Q}$
・$q, q' \varepsilon \bar{Q} \Rightarrow q$ AND $q' \varepsilon \bar{Q}$
・$q, q' \varepsilon \bar{Q} \Rightarrow q$ OR $q' \varepsilon \bar{Q}$

以上によって得られるものだけが、質問表現である。

一方、このような検索要求表現に対して、検索関数ρを、

・$q = t$: $\rho(d, q) = \phi(d)(t)$
・$q =$ NOT q' : $\rho(d, q) = 1 - \rho(d, q')$
・$q = q'$ AND q'' : $\rho(d, q) = \min(\rho(d, q'), \rho(d, q''))$
・$q = q'$ OR q'' : $\rho(d, q) = \max(\rho(d, q'), \rho(d, q''))$

と定義する。

2．2 ファジィ検索要求

前述のBoolean検索要求では、要求式中に含まれる特定の索引語に重点を置いて検索するような要求は表現できない。そのような要求をも表現するために重み等を表す数値を導入する方法が研究されている。

例えば、通常のBoolean検索要求

$q = t$ AND s

においては、索引語tとsに同等の重みを付していると考えられる。しかし、tとsについて扱う文献を知りたいのであるが、特に索引語tに重点を置いて検索して欲しいという場合も十分起こり得る。ところが、通常のBoolean検索要求ではこれを表現することはできない。そこで、検索要求を構成する索引語や部分検索要求に重み等を表す数値を付与することが考えられ、ファジィ検索要求と呼んでいる。この方法では、例えば、

$q = t_{0.9}$ AND $s_{0.3}$

のように、索引語の検索要求における重要度は数値に託して表現される。この数値を重みとして解釈する方法をBookstein[1]が提案し、また閾値として解釈する方法をBuell and Kraft[2]が示している。

3．ファジィ検索要求の言語的アプローチ

3．1 RELEVANTの設定

一つの索引語から構成されるBoolean検索要求

$q = t$

を考える。この要求式は、「索引語tに適合した文献を検索して欲しい」というユーザーの（自然言語による）要求を表現すると考えることができる。このように、通常のBoolean検索要求には、「適合して(relevant)」というファジィな述語が背後にある、言い換えれば、$q = t$なる検索要求は、

$q =$ relevant to t

の略記であるとみなせる。この「適合して」をなんらかの方法でファジィ集合として設定できた場合、言語ヘッジをこのファジィ集合「適合して」に作用するものとして導入することが可能となる。その結果、例えば、

$q =$ very relevant to t
$q =$ (very relevant to t) AND (relevant to s)
$q =$ (relevant to t) OR (more or less relevant to s)

等の表現が可能となる。

本稿では、「適合して(relevant)」をデータベースにおけるファジィ検索要求[3)4)]との類推から設定することを考える。通常のデータベースでは、例えば、「年齢が50才の人を検索せよ」なる質問を想定するが、馬野ら[3)]、Tahani[4)]は「年取った人 (old man)を検索せよ」なるようなファジィな述語を含む質問の処理について考察している。例えば、ファジィ集合「年取った (old)」を図1のように設定する時、60才の人は適合度1で、55才の人は適合度 0.5で検索するというのがその手法である。当然ながら、適合度の大きい順に出力する。これに対し、文献情報検索では、通常、文献と索引語の適合度をそのまま文献と質問の適合度としている（2．1参照）。しかし、むしろ文献と索引語の適合度がxの時、適合度xで検索すると考えると、実は図2のファジィ集合「適合して(relevant)」が存在することになる。式で書けば、

$$RELEVANT(x)=x \qquad x \in [0,1].$$

となる。

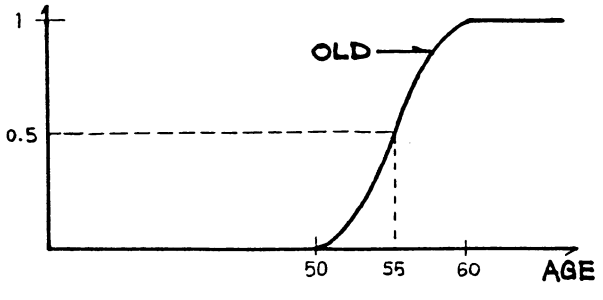


図1　ファジィ集合 OLD

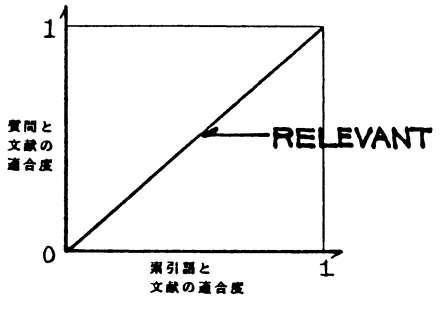


図2　ファジィ集合 RELEVANT

以上のように設定したファジィ集合「適合して」を以下 RELと略記する。

（注）この RELの定義は、結果的に fuzzy-valued logic における言語的真理値 u-true と同じものとなっている。

3．2　言語ヘッジの導入

RELの定義から、2．1で述べた適合度の計算（検索関数ρの定義）は、

- q＝t　　：$\rho(d, q)=REL(\phi(d)(t))$
- q＝NOT q'　　：$\rho(d, q)=1-\rho(d, q')$
- q＝q' AND q"：$\rho(d, q)=\min(\rho(d, q'), \rho(d, q''))$
- q＝q' OR q"：$\rho(d, q)=\max(\rho(d, q'), \rho(d, q''))$

と変更される。

言語ヘッジは、この RELに作用する演算子として導入できる。言語ヘッジには、VERY、MORE OR LESS、SLIGHTLY等様々なものが定義されているが、ここでは、簡単のため VERY とMORE OR LESSを用いることにする。その定義は、いくつか提案されているが、本稿では一般的に用いられている

- VERY $REL(x)=\{REL(x)\}^2$
- MORE OR LESS $REL(x)=\{REL(x)\}^{\frac{1}{2}}$

を採用する。以下、q＝ very relevant to t をq＝ VERY t 等と略記する。

この一見自明な RELを考えることにより言語ヘッジを導入でき、より自然言

語に近い検索要求表現が可能となる。例えば、「索引語ｔに非常に適合する文献を検索せよ」なる要求は、

q = VERY t

と表わされ、「索引語ｔに非常に適合し、かつ索引語ｓに多かれ少なかれ適合する文献を検索せよ」なる要求は、

q = (VERY t) AND (MORE OR LESS s)

と表すことができる。

尚、前述の定義のままでは、例えば、

q = VERY NOT t

のように実際の文法に合わないものも生成されるが、Zadeh[5]の考え方に従い、

IRRELEVANT(x) = (NOT RELEVANT)(x)
= 1 − RELEVANT(x)

と定義し、

VERY NOT RELEVANT = VERY IRRELEVANT

と解釈することにより解決する。

３．３　言語ヘッジの効果

言語ヘッジの効果は、付与された索引語に対し要求の度合いをきつくしたり緩めたりするものと考えられる（図３）。例えば、閾値を 0.7とする、すなわち、適合度が0.7 以上の文献を出力する場合を考える。このとき、索引語ｔについて重み 0.8の文献は、要求式ｑ＝ｔに対しては検索されるが、ｑ＝（VERY t）に対しては検索されない。逆に、重み 0.6の文献は、ｑ＝ｔに対しては検索されないが、ｑ＝（MORE OR LESS t）に対しては検索される。

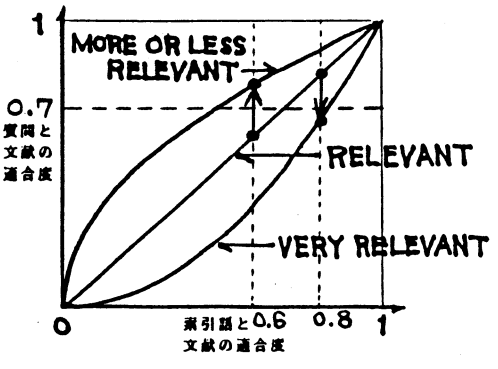


図３　言語ヘッジの効果

３．４　データベースのファジィ検索要求との比較

以上の考察から分ることは、ファジィ文献情報検索における通常のBoolean検索要求が、すでにファジィ・データベースにおけるTahani[4]のいうファジィ検索要求に相当することである。従って、文献情報検索とデータベース検索の分野でファジィ検索要求という術語の使われ方にずれがあることは注意する必要がある。

次に、両検索におけるファジィな述語の定義域を考えてみる。データベース検索においてはYOUNG, OLD等の定義域は年齢を表わす数値の集合といった非常

に明確なものである。これらに限らずこの分野で用いられるファジィな述語は大抵そうであると考えられる。これに対し RELの場合は、その設定の仕方の類似性にもかかわらず、定義域が〔0,1〕閉区間である必然性は何らない。すなわち、定義域の設定は、文献と索引語の関係をどう捉えるかに依存し、その捉え方にも一意性はない。

データベース検索と文献情報検索の違いは、その対象とするものの明確さとあいまいさにあるといわれている[8]が、今述べた面にもその違いが現れている。

3．5　言語的適合度

データベース検索の分野では馬野ら[3]がデータ自体もファジィな場合、すなわち、例えば年齢なら「20才ぐらい」とか「若い (young)」といったものまで許容するシステムについて考察している。これと、先の RELの導入および設定をかんがみれば、文献を索引付けする際の重みとして REL等を用いようと考えるのは自然である。すなわち、この索引語はこの文献に「非常に適合している (very relevant)」とか「あまり適合していない (not very relevant)」といった言語表現を重みとして導入することになる。言い換えるとNegoitaら[9]の述べる fuzzy-valued logic の導入に他ならないが、重みは真理値として捉えるより適合度として捉える方が自然なので、以下このような重みの言語表現を言語的適合度と呼ぶことにする。

言語的適合度は、本質的に言語的真理値であるから fuzzy-valued logic と同様に、RELEVANTとIRRELEVANTを基礎に言語ヘッジを用いてその他の表現を派生させる。例えば、言語ヘッジとして VERY とMORE OR LESSを用いれば、次の６段階の表現が可能となる：

（１）VERY RELEVANT
（２）RELEVANT
（３）MORE OR LESS RELEVANT
（４）MORE OR LESS IRRELEVANT
（５）IRRELEVANT
（６）VERY IRRELEVANT

言語的適合度を用いた場合の検索は、馬野ら[3]が論じたデータベース検索と同様である。

本来、人間が〔0,1〕閉区間の細い値で重み付けすることは不可能であり、せいぜい数段階から十数段階で限度であろう。その意味では、このfuzzy-valued logic に基くモデルは、人間による索引付けのよいモデルとなっていると考えられる。

4．あとがき

本稿は、ファジィ理論の自然言語的側面を文献情報検索の分野に応用したものである。Salton ら[6]は、ファジィ理論の特徴の一つは自然言語との関連にあるにもかかわらず、言語的な方向での研究がみられないと批判している。しかし、データベース検索の分野では言語的なアプローチが盛んであるから、文献情報検索の分野でも、今後、例えば言語的な取扱いに基いた自動索引付けの研究等が期待される。

参考文献

1) A. Bookstein: J. of the American Society for Information Science; Vol. 31; pp. 240-247 (1980).
2) D. A. Buell and D. H. Kraft: J. of the American Society for Information Science; Vol. 32; pp. 211-216 (1981).
3) 馬野元秀，深海悟，水本雅晴，田中幸吉: 電子通信学会技術研究報告; AL80-50; pp. 45-54 (1980).
4) V. Tahani: Information Processing and Management; Vol. 13; pp. 289-303 (1977).
5) L. A. Zadeh: J. of Cybernetics; Vol. 2; pp. 4-34 (1972).
6) G. Salton and M. J. McGill: Introduction to Modern Information Retrieval; McGraw-Hill; p. 422 (1983).
7) 梶博行，新田義彦: 電子通信学会論文誌; Vol. J62-D; pp. 297-304 (1979).
8) T. Radecki: Int. J. of Man-Machine Studies; Vol. 18; pp. 407-439 (1983).
9) C. V. Negoita and D. A. Ralescu: Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis; Birkhauser Verlag ; p. 80 (1975).

各種F-クラスタリング・アルゴリズムのテクスチャ解析への応用とその総合評価

法政大学　廣田 薫　※岩間 和也　国枝 幸泰

1.はじめに

512x512画素のカラー静止画像を32x32の小領域に分割し、1つの小領域を18の特徴量でベクトル表現した画像データに、ファジィ・クラスタリング手法を応用して、テクスチャ解析を行った。適用アルゴリズムは、ファジィ・ISODATA法[1),2)]とその変形のTN、TD、TWアルゴリズム[3)]で、それらのベキ指数パラメータを3通りに変えた計12種類を用いた。また、それぞれで得られる分割行列を主観エントロピー[4),5)]を用いて比較し、各手法の総合評価を行った。

2.ファジィ・ISODATA法とその変形アルゴリズム

分割最適型の分類手法でクラスタの等質性基準としてクラスタ内平方和を用い、これを"重みつき最小二乗法"の問題として扱い、重みとして適当な帰属関数を工夫するというのがBezdek、Dunnらの提案したファジィ・ISODATA法である[1),2)]。

データ集合$X=\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{n}$において、各データはs次元のベクトルで表わされるとする。このとき、これらのn個のデータをc個のクラスタに分類することを考える。各データが各クラスタに属する割合を分割行列Uで表わす。

$$U=[u_{ij}] \qquad i=1,2,\cdots,c \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{2-1}$$

$$u_{ij}\in[0,1] \tag{2-2}$$

$$1\leqq\forall i\leqq c \qquad \sum_{j=1}^{n} u_{ij} > 0 \tag{2-3}$$

$$1\leqq\forall j\leqq n \qquad \sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1 \tag{2-4}$$

u_{ij}は、j番目のデータがi番目のクラスタに属する割合(帰属度)を示す。(2-3)式は、各々のクラスタには、かならず正の帰属度があることを表わし、(2-4)式は各データが、それぞれのクラスタに属する割合の総和が、1に規格化されていることを表わす。

実行指標として、

$$f=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{c} g[w(\mathbf{x}_j),u_{ij}]d(\mathbf{x}_j,\mathbf{v}_k) \tag{2-5}$$

を考える。ここで、$w(\mathbf{x}_j)$は、各データに与えられる事前荷重であり、$d(\mathbf{x}_j,\mathbf{v}_k)$は、$\mathbf{x}_j$と$\mathbf{v}_k$(付加要素)の非類似度である。非類似度は、距離よりも弱い概念であり、

$$d(\mathbf{x}_j,\mathbf{v}_k) \geq 0 \tag{2-6}$$

$$d(\mathbf{x}_j,\mathbf{v}_k) = d(\mathbf{v}_k,\mathbf{x}_j) \tag{2-7}$$

の2つの公理を満す尺度として定義されている。$\mathbf{v}_k$とUを変えて、

$$\mathrm{Min}\{f\,|\,\mathbf{v}_k,\ U:(2\text{-}3)\&(2\text{-}4)\} \tag{2-8}$$

で与えられるfの最適化問題を扱うことにする。この型のアルゴリズムとして、

$$f_p(u,\mathbf{x},\mathbf{v})=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{c}(u_{ij})^p\,\|\mathbf{x}_j-\mathbf{v}_k\|^2 \qquad (1\leqq p<\infty) \tag{2-9}$$

の局所最小化によりUを決定する反復手法が、Bezdekのファジィ・ISODATA法[2)]である。

S.Z.SelimとM.A.Ismailは、ファジィ・ISODATA法の変形として3種類の要素にしきい値を用いるセミ・ファジィのアルゴリズムTN,TD,TWを提唱した[3)]。TNはクラスタ数に、TDは(2-9)式の$\|\mathbf{x}_j-\mathbf{v}_k\|^2$に、TWは$u_{ij}$にそれぞれしきい値を用いながら反復する手法である。

3.主観エントロピーによる各種ファジィ・クラスタリング・アルゴリズムの総合評価

各種ファジィ・クラスタリング・アルゴリズムを考察する場合、どのアルゴリズムが実際のデータ構造をうまく表現するかという問題が生じるが、データ構造があいまいな場合を考えると、これは非常に難しい。従ってアルゴリズムを1つに絞るよりも、各種アルゴリズムを適用して得られる分割行列を総合的にとらえるほうがよいと考えられる。それを確率集合と主観エントロピーの観点から考察する[4),5)]。

分割行列Uの第i行$u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in}$は、各データが第iクラスタに属する程度(メンバーシップ)を表わしているので、X上の1つのファジィ集合A_i

$$A_i : X \longrightarrow [0,1] \tag{3-1}$$

を形成している。従って、1つの分割行列Uは、c個のファジィ集合の族とみなせる。

$$U = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \\ A_c \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

これを分割ファジィ集合と呼ぶ[5]。

今、クラスタリング・アルゴリズムがk個あるものとし、その各々から得られるk個の分割行列とも行番号(クラスタ番号)は本質的に同一順序に番号付けされているものとし、それらの総合結果を評価対象にする。

k個の分割行列を$\{U_\ell\}_{\ell=1,\cdots,K}$とすれば、ファジィ集合の族$\{A_{i\ell}\}_{i=1,\cdots,c;\ \ell=1,\cdots,K}$が得られる。k個の分割行列の各々に対応するアルゴリズムをω_ℓとして、その全体を

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_K\} \tag{3-3}$$

とする。さらに各アルゴリズムの評価の重要度を表現するためにパラメータ空間と呼ぶ確率空間

$$(\Omega, B, P) \tag{3-4}$$

を考える。すると確率集合Aは、

$$A : X \times \Omega \longrightarrow [0,1] \tag{3-5}$$

なる定義関数により定義される。ここでAは、各$x(\in X)$を固定するとB可測であるものとする[6]。

ある2値事象の生起確率をpとすれば、その事象のエントロピーは、Shannonにより

$$h(p) = -[p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)] \tag{3-6}$$

で定義されている[7]。xの評価にあいまいさがなく{0,1}2値評価の場合は、確率集合が純粋状態にあると呼ばれ、その場合は全ての情報が

$$\Omega_1(x) = \{\omega \mid A(x,\omega) = 1\} \tag{3-7}$$

$$\Omega_0(x) = \{\omega \mid A(x,\omega) = 0\} \tag{3-8}$$

$$p(x) = \int_{\Omega_1(x)} dP \tag{3-9}$$

で表現される。この場合のShannon流のあいまいさは$h(p(x))$で与えられ、パラメータ空間の分割(3-7),(3-8)式は評価者の主観によるのでこの$h(p(x))$を確率集合Aのxに関する主観エントロピーと呼びH(x,A)で表わす。

$$H(x,A) = -[p(x)\log_2 p(x) + (1-p(x))\log_2(1-p(x))] \tag{3-10}$$

一般的には、{0,1}以外のあいまいな状態も考える必要がある。そこで評価値がm個あるとし

$$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leq 1 \tag{3-11}$$

とする。各評価値a_iの出現頻度$p_i(x)$は、次に示すパラメータ空間2m分割の結果得られるものと考える。

$$\Omega = \Omega_0(x) \cup \Omega_1(x) \tag{3-12}$$

$$\Omega_0(x) = \bigcup_{i=0}^{m} \Omega_0^i(x), \quad \Omega_1(x) = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_1^i(x) \tag{3-13}$$

$$\Omega^i(x) = \Omega_0^i(x) \cup \Omega_1^i(x) \tag{3-14}$$

$$P(\Omega_1^i(x))/P(\Omega^i(x)) = a_i \tag{3-15}$$

$$P(\Omega^i(x)) = p_i(x) \tag{3-16}$$

評価者の評価の複雑さまたは多様性は、全てこのパラメータ空間の2m分割によるものと考えることができるので、確率集合Aのxに関する主観エントロピーH(x,A)は

$$H(x,A) = -\sum_{i=1}^{m}[a_i p_i(x)\log_2 a_i p_i(x) - (1-a_i)p_i(x)\log_2(1-a_i)p_i(x)] \tag{3-17}$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} p_i(x)\log_2 p_i(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i(x)h(a_i) \tag{3-18}$$

で与えられることになる。

以上は単一の確率集合の場合だが、複数の場合も同様に定義できる[4]。確率集合AとBのxに関する主観エントロピーH(x,A,B)は、

$$H(x,A,B) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p(a_i, b_j, x)\log_2 p(a_i, b_j, x) + \sum_{i=1}^{m} p(a_i, x)h(a_i) + \sum_{j=1}^{m} p(b_j, x)h(b_j) \tag{3-19}$$

で与えられる。ここで$\{a_i\}_{i=1}^{l}$, $\{b_j\}_{j=1}^{m}$はそれぞれAとBの取る[0,1]区間内の値である。また、確率集合AとBのxに関する相互主観エントロピーI(x,A,B)は、

$$I(x,A,B)=H(x,A)+H(x,B)-H(x,A,B) \qquad (3\text{-}20)$$

で与られる。

以上の議論は個別のデータxについてであるが、全体的には次に示すデータ集合X全体に関する平均値が重要な尺度になる。

確率集合A_iに関するXの平均主観エントロピー

$$\overline{H}(X,A_i)=1/n\sum_{k=1}^{n}H(x_k,A_i) \qquad (3\text{-}21)$$

確率集合A_iとA_jに関するXの平均主観エントロピー

$$\overline{H}(X,A_i,A_j)=1/n\sum_{k=1}^{n}H(x_k,A_i,A_j) \qquad (3\text{-}22)$$

確率集合A_iとA_jに関するXの平均相互主観エントロピー

$$\overline{I}(X,A_i,A_j)=1/n\sum_{k=1}^{n}I(x_k,A_i,A_j) \qquad (3\text{-}23)$$

4.ファジィ・クラスタリングのテクスチャ解析への応用

ファジィ・クラスタリング・アルゴリズムを適用するテクスチャ画像として、写真1の航空写真を用いた。写真1はカラー画像で、画像処理装置TOSPIXにより赤成分(R)、緑成分(G)、青成分(B)の3画像(1画像512x512画素、各画素8ビット濃淡画像)の合成で与えられているが、ここでは印刷の都合上、カラー画像を白黒撮影してある。

1画面を32x32の正方小領域に分割し、R、G、B、各画面より6特徴量を抽出し、1つの小領域(16x16画素x3画面)を18の特徴量でベクトル表現して、ファジィ・クラスタリングによるテクスチャ解析を行った。

特徴量としては画面全体の情報を反映する大局的特徴量として濃淡の平均値、標準偏差、それに一部分のみの情報で決定される局所的特徴量として有界変動量[3] 0°,45°,90°,135°方向を用いた。有界変動量はパターンの局所的性質を反映した計算量の少ない特徴量として、数学における有界変動関数の全変分の概念を応用して定義されたものである。ディジタル画像の場合はθ方向に隣合っている画素の濃淡値の差分の絶対値をとったものを加え合わせるだけで計算できる。ただし、平均値、標準偏差と有界変動量間での特徴量のつり合いを考えて有界変動量は、加算回数で割った値を特徴量として用いた。図1に画像の小領域分割と各小領域における有界変動量の方向を示す。

クラスタ数を任意に与え、以上のようにベクトル表現された各小領域が各々のクラスタに属する割合(分割行列)をファジィ・ISODATA法と TN,TD,TWとそれぞれのベキ指数((2-9)式におけるp)を1.2,1.6,2.0に設定した計12の手法によって計算した。同時にテクスチャ解析の結果を視覚的に表示するため、各小領域が帰属度最大のクラスタに属するとしてクラスタごとに色分けしたものの1例が写真2の処理画像である。

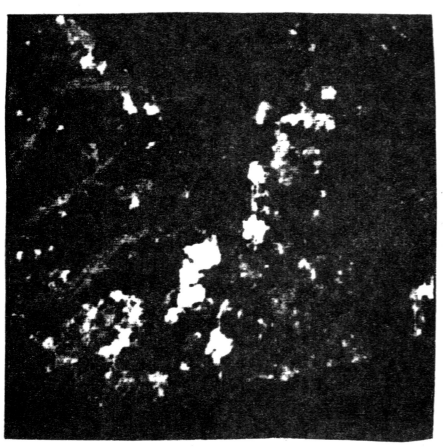


写真1.原画像(航空写真)

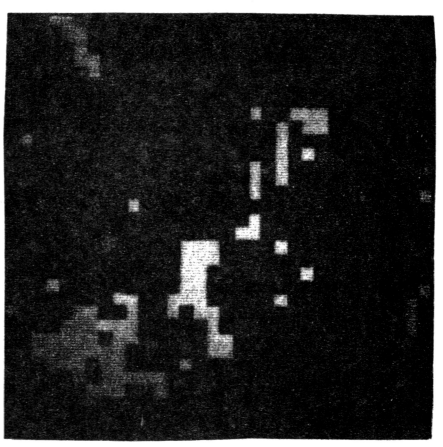


写真2.写真1のテクスチャ解析の結果
(F.ISODATA p=1.2)

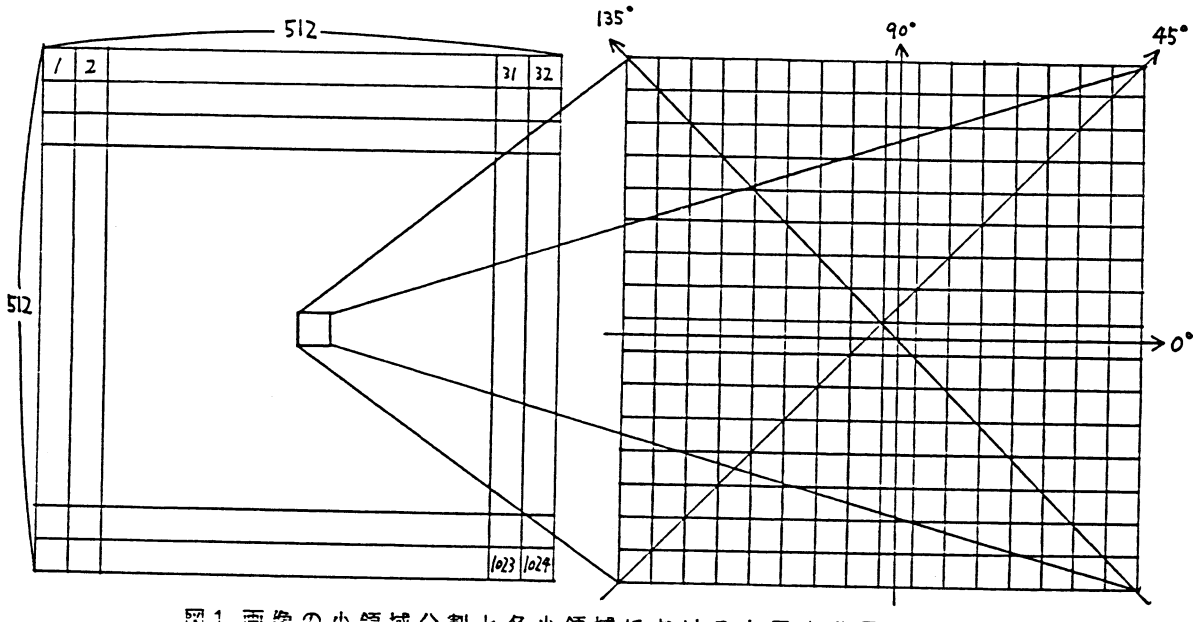


図1.画像の小領域分割と各小領域における有界変動量の方向

5.12通りのファジィ・クラスタリングの総合評価

各クラスタリング・アルゴリズムから得られる分割行列の行番号(クラスタ番号)を本質的に同順序に並べ換え、c個の確率集合Aのデータ集合の各要素xに関する主観エントロピー、及び各確率集合間の相互主観エントロピーを計算した。(ここでは c=5)

まず、得られるk個の分割行列を(5-1)式のようにc個の確率集合として表わす。

$$A_1=\begin{pmatrix} u^1_{11} & u^1_{12} & \cdots & u^1_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u^k_{11} & u^k_{12} & \cdots & u^k_{1m} \end{pmatrix} \quad A_2=\begin{pmatrix} u^1_{21} & u^1_{22} & \cdots & u^1_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u^k_{21} & u^k_{22} & \cdots & u^k_{2m} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad A_c=\begin{pmatrix} u^1_{c1} & u^1_{c2} & \cdots & u^1_{cm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u^k_{c1} & u^k_{c2} & \cdots & u^k_{cm} \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}1)$$

ここで、各要素の値は小数1桁で表わし、(3-18)式を用いて計算した。p_iは[0,1]区間を0.1きざみに11値に分割し、確率集合の各要素が各々の区間で現れる確率である。$h(a_i)$は、各々の区分での確率集合の要素に対応する値で(3-6)式で計算した。これより(3-21)式で12通りの手法の確率集合に関するデータ集合の平均主観エントロピーを計算した結果が表1である。同様に12通りの手法について、(3-19),(3-22)式で2つの確率集合に関するデータ集合の平均主観エントロピーを、(3-20),(3-23)式で2つの確率集合に関するデータ集合の平均相互主観エントロピーを計算し、表2に示した。

表1.平均主観エントロピー

$\bar{H}(X,A1)$	0.035
$\bar{H}(X,A2)$	0.982
$\bar{H}(X,A3)$	0.720
$\bar{H}(X,A4)$	1.367
$\bar{H}(X,A5)$	0.744

A1 : 海
A2 : 山
A3 : 平地
A4 : 谷
A5 : 雲

表2.平均主観エントロピーと平均相互主観エントロピー

	$\bar{H}$	$\bar{I}$
X.A1.A2	0.241	0.776
X.A1.A3	0.331	0.425
X.A1.A4	0.275	1.124
X.A1.A5	0.332	0.447
X.A2.A3	0.175	1.527
X.A2.A4	0.159	2.190
X.A2.A5	0.181	1.545
X.A3.A4	0.232	1.855
X.A3.A5	0.246	1.219
X.A4.A5	0.172	1.939

まず、表1からわかるようにA_1(海の部分)に関する平均主観エントロピー値は、他のエントロピーの値に比較して明らかに小さくて0に近いので、A_1は他に比べてよくまとまり、コンパクトであることがわかる。一方、A_2(山の部分)とA_4(谷の部分)に関する平均主観エントロピーは、他に比較して

大きな値であるため、表2からわかるように相互干渉も大きい。また、表2から2つに関する平均主観エントロピーは小さな値である。このことから、山と谷の部分は似かよっているため、A_2とA_4の帰属度が、ほぼ等しく割り当てられる小領域があるためだと考えられる。

また、表1と表2より2つの確率集合に関する平均主観エントロピーは、1つの確率集合に関するそれと比べると、全体的に2つの確率集合のエントロピーの方が小さい。これは、データ集合が推定されたクラスタ数でクラスタリングされておらず、相互干渉が大きいため、1つのクラスタで考えるよりも、2つのクラスタで考えると、データ集合がうまくクラスタリングされているようにみえるためである。

以上のように、この分析結果からみると、クラスタ間で相互干渉が大きいところもみられる。しかし、この分析では12通りの手法についてのクラスタリング結果を総合的にとらえているので、12通りの手法のそれぞれが比較的大きな相互干渉をしているためにこのような結果になったものと考えられる。ここでは、12通りの手法について分析したが、分析する手法の選び方も結果に微妙な影響を与えるようである。

次に12通りの手法をベキ指数pの違いにより3組に分け、その各々に主観エントロピーの概念を用いて分析し、pの値の妥当性を検討する。pの違いによる主観エントロピーを表3,表4に示す。

p=1.2の場合、1つの確率集合に関する平均主観エントロピーは、p=1.6,p=2.0の場合に比較すると全体的に小さく、各確率集合間の相互干渉も小さい。また、p=1.6とp=2.0の場合を比較すると平均主観エントロピーも相互干渉も比較的小さい。従って、ベキ指数の値は小さくて、1に近いほどうまくクラスタリングされていることがわかった。

6.おわりに

本論文では、ファジィ・ISODATA法とその変形のTN,TD,TW,アルゴリズムを具体的な画像データ(航空写真)に適用し、各アルゴリズムのベキ指数pを3通りに変えて、テクスチャ解析を行った。

次に以上12通りのファジィ・クラスタリング手法による結果を主観エントロピーの概念を応用して、総合評価を行った。結果としてはよくまとまったコンパクトなクラスタもあったが、クラスタ間での相互干渉がかなりみられるものもあった。また、主観エントロピーの概念を用いてアルゴリズムにおけるベキ指数pの値の妥当性について述べた pの値は小さくて1に

表3.pの違いによる平均主観エントロピー

	p=1.2	p=1.6	p=2.0
$\bar{H}$(X.A1)	0.535	0.558	0.607
$\bar{H}$(X.A2)	0.566	0.717	0.936
$\bar{H}$(X.A3)	0.555	0.674	0.853
$\bar{H}$(X.A4)	0.592	0.813	1.008
$\bar{H}$(X.A5)	0.555	0.682	0.881

表4.pの違いによる平均主観エントロピーと平均相互主観エントロピー

	p=1.2		p=1.6		p=2.0	
	$\bar{H}$	$\bar{I}$	$\bar{H}$	$\bar{I}$	$\bar{H}$	$\bar{I}$
X.A1.A2	0.081	1.021	0.085	1.190	0.105	1.438
X.A2.A3	0.118	0.972	0.133	1.099	0.154	1.306
X.A1,A4	0.094	1.034	0.092	1.278	0.104	1.511
X.A1,A5	0.124	0.966	0.127	1.112	0.151	1.337
X,A2,A3	0.078	1.043	0.077	1.314	0.054	1.735
X.A2.A4	0.061	1.098	0.062	1.468	0.067	1.877
X.A2.A5	0.085	1.036	0.075	1.324	0.058	1.759
X.A3.A4	0.095	1.053	0.088	1.399	0.083	1.778
X,A3,A5	0.124	0.986	0.115	1.241	0.100	1.634
X.A4.A5	0.096	1.051	0.077	1.418	0.056	1.833

近いほどうまくクラスタリングされることがわかった。
本論文では、ファジィ・クラスタリング・アルゴリズムとしてファジィ・ISODATA法を中心に扱ったが、主観エントロピーの概念を応用すれば、他のファジィ・クラスタリング・アルゴリズムについても総合評価が可能であり、それについては現在検討中である。また、他の画像データへの応用も試みている。

参考文献

1) J.C.Dunn : A Fuzzy Relative of the ISODATA Process and its Use in Detecting Compact Well Separated Clusters ; J.Cybernetics ; Vol.3 ; pp32/57 (1974)
2) J.C.Bezdek : Patter Recognintion with Fuzzy Objective Function Algorithms ; Plenum Press,New York (1981)
3) S.Z.Selim,M.A.Ismail : Soft Clustering of Multidimensional Data,A Semi-Fuzzy Approach ;Patter Recogntion ; Vol.17 ; No.5 ; pp559/568 (1984)
4) K.Hirota : Ambiguty bssed on the Concept of Subjective Entropy ; in Fuzzy Infomation and Decision Processes (M.M.Gupta,E.Sanchez eds.),North-Hollond,Amsterdam ; pp29/40 (1982)
5) W.Pedrycz,K.Hirota : An Application of Probabilistic Sets of Fuzzy Clustering ; in The Analysis of Fuzzy Infomation (J.C.Bezdek ed.),CRC Press (1986 to apper)
6) K.Hirota : Concepts of Probabilistic Sets ; Fuzzy Sets and System ; Vol.5 ; pp31/46 (1981)
7) C.E.Shannon : A Mathematical Theory of Commnication ; Bell Syst.Tech.J ; Vol.27 ; pp370/423 (1948)
8) K.Hrota : The Bounded Variation Quantity(B.V.Q.) and its Application to Feature Extracations ; Pattern Recognintion ; Vol.15 ; No.2 ; pp93/101 (1982)

初期診断支援システムの開発

大阪府立成人病センター　情報企画室　三嶋博昭　野村　裕

1　はじめに

診療初期段階においては、患者からの問診や診察所見などの情報は対象疾患群の想定に重要な意味をもつ。また、日常的に行なわれている血液・化学検査は、事後の診断・治療方針を決定するうえで不可欠の手段である。

そこで、これらの情報のみによって、診療の初期段階において、概括的な病態の診断ないしは方向づけを支援するシステムの構築を試みた。

診療支援システムにとって重要な問題は、知識ベースの構築である。我々は初期段階における診断支援という立場から、特定の分野に限定しない方針で、まず疾患に関する知識ベースの構築を試みた。知識ベースの構築にあたっては、AMA（American Medical Association）のCMIT（Current Medical Information & Terminology）を参考にした。さらに、この知識ベースに対して、自覚症状や診察所見などのキー・ワードからの検索・照会を可能とするシステムを試作した。

Table 1 The number of registered diseases in the index file

DISEASES AND CONDITIONS RELATED TO THE BODY AS A WHOLE,INCLUDING PSYCHE	1237
INTEGUMENTARY SYSTEM	1236
MUSCULOSKELETAL SYSTEM	1151
RESPIRATORY SYSTEM	538
CARDIOVASCULAR SYSTEM	691
HEMIC AND LYMPHATIC SYSTEM	505
DIGESTIVE SYSTEM	869
UROGENITAL SYSTEM	1067
ENDOCRINE SYSTEM	293
NERVOUS SYSTEM	906
ORGANS OF SPECIAL SENSE	718
TOTAL	9211

また、血液・化学検査の異常所見と疾患との関連についても、疾患毎に整理を進めており、知識ベース上での表現、あいまいさの処理などについての検討も加えて報告する。

2　知識ベースの表現と構築

知識ベースの構築にあたり、CMIIに記載されている疾患約４０００の索引ファイルを作成した。この索引ファイルには、同義疾患名も登録されており、計約９０００余りの疾患名が登録されていることになる（表１）。さらに、今回は、内分泌・血液系疾患を対象として、知識ベースの構築をおこなった。

知識ベースの表現としては、プロダクション・ルール、意味ネットワーク、フレームなどがあるが、疾患ごとの知識の表現が可能であるという点から、フレーム-likeな表現とした。知識の表現の例を図１に示す。

知識は疾患別に疾患名、発生に関する項目（頻度、性、年齢）、同義疾患名、関連疾患、自覚症状／診察所見、検査の項目からなっている。また、自覚症状と診察

```
NAME: HODGKIN DISEASE

OCCURRENCE:MALE(POSSIBLY)
           25-70(Y)

SYNONYM: LYMPHOGRANULOMATOSIS,MALIGNANT

RELATED DISEASE: SKIN,HODGKIN DISEASE

SYMPTOM/SIGN: COUGH
              DIARRHEA(POSSIBLY)

LAB/EXAM:
     BLOOD:
           WBC INCREASED(POSSIBLY)
           PLATELETS DECREASED
     BONE MARROW:
           REED-STERNBERG CELLS(POSSIBLY)
```

Fig.1 An example of knowledge representation

所見を中心としたキー・ワードを選択して登録した。

3　システムの概略

図２にシステムの概略を示す。それぞれのファイルに登録されている疾患名及びそれらの同義語とキー・ワードとの対応は、システム内部で管理されているコードによって関連づけられている。

自覚症状や診察所見などのキー・ワードからの検索には、キー・ワードを直接入力する方法と、メニュー画面より番号を選択入力する方法とがある（図3）。

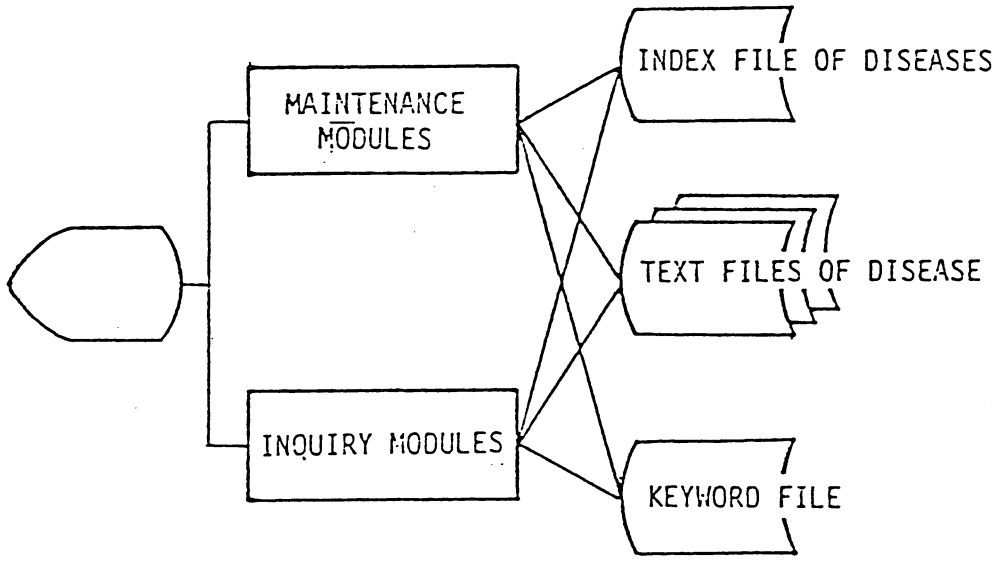


Fig.2 System configuration

SYMPTOM/SIGN

1	ACNE	2	AMBLYOPIA	3	AMENORRHEA
4	ANOREXIA	5	ANXIETY	6	APATHY
7	APNEA	8	APPREHENSION	9	AREFLEXIC
10	ARRHYTHMIAS	11	ASCITES	12	ASTHENIA
13	ASYMPTOMATIC	14	ATAXIA	15	BACKACHE
16	CHILLS	17	COLLAPSE	18	COMA
19	COFUSION	20	CONSTIPATION	21	CONVULSION
22	COUGH	23	CRAMPS	24	CYANOSIS
25	DEAFNESS	26	DEHYDRATION	27	DELIRIUM
28	DEPRESSION	29	DIARRHEA	30	DIPLOPIA
31	DISORIENTATION	32	DISTENSION	33	DIZZINESS
34	DROWSINESS	35	DYSARTHRIA	36	DYSPNEA
37	EDEMA	38	EMACIATION	39	ENURESIS
40	ERUCTATION	41	EXHAUSTION	42	EXOPHTHALMOS
43	FAINTNESS	44	FATIGABILITY	45	FATIGUE
46	FEVER	47	GLOSSTIS	48	GOITER
49	HEADACHE	50	HEMATURIA	51	HEMIANOPSIA
52	HEMOPTYSIS	53	HEMORRHAGE	54	HICCUPS
55	HIRSUTISM	56	HOARSENESS	57	HUNGER

! PLEASE ENTER.....ENTER/B/###/Q/O/C

Fig.3 An example of menue panel of keywords

キー・ワードが指定されると、システムはそのキー・ワードに対して登録されている疾患名を表示する（図4）。キー・ワードの指定は、複数の指定、それらのANDやORの組み合わせの指定が可能である（図5）。

```
FEVER
1    ADRENAL CORTEX,CARCINOMA
2    ADRENOCORTICAL INSUFFICIENCY,ACUTE
3    DIABETES MELLITUS,TRANSIENT,OF NEWBORN
4    PANCREAS,ABSCESS
5    PANCREAS,CYST,CONGENITAL
6    PANCREAS,CYST,FALSE
7    PANCREAS,CYST,TRUE
8    PANCREATITIS,ACUTE
9    PANCREATITIS,CHRONIC
10   PANCREATITIS,POSTOPERATIVE
11   THYROIDITIS,CHRONIC LYMPHOCYTIC
12   THYROIDITIS,GRANULOMATOUS
13   THYROTOXIC CRISIS
14   WATERHOUSE-FRIDERICHSEN SYNDROME
! PLEASE ENTER.....ENTER/B/###/Q
```

Fig.4 A result of inquiry by using a keyword of "FEVER"

```
THYROID   AND SWEATING
1    ACROMEGALY
2    GRAVES DISEASE
3    HEART,THYROTOXIC DISEASE OF
4    HYPERTHYROIDISM
5    PHEOCHROMOCYTOMA,WITH THYROID CARCINOMA
6    THYROIDITIS,GRANULOMATOUS
! PLEASE ENTER.....ENTER/B/###/Q
```

Fig.5 A result of inquiry by using keywords of "THYROID" and "SWEATING"

4　あいまいさの表現とその処理

以上に紹介したシステムは、基本的にあいまいさの処理については、対応していないが、以下、我々が現在開発を進めているシステムにおけるあいまいさの処理についての検討結果について述べる。

図1に示すように、あいまいさの処理の対象としては、年齢（25-70,CHILD,YOUNG,etc）、検査値（WBC INCREASED,HGB RAPIDLY INCREASED,etc）などと、各項目に対する真理値、例えば自覚症状に対する真理値（DIARRHEA(POSSIBLY)）などがある。前者については、適当なメンバーシップ関数を定義し、DEGREE OF TRUTH を求めてFUZZY LOGIC の手法を用いる事によって処理する事を考えている。ただ、医学知識のあいまいさを考慮する必要があるのと、初期診断のためのシステムであるという事から、それほど厳密な推論は必要でないと考えている。後者の処理についても、基本的にはFUZZY LOGIC の手法によって処理が可能であると考える。

システムの機能としては、自覚症状／診察所見などのキー・ワードを含む疾患を抽出し、その後入力される血液・化学検査結果から候補診断を決定するが、候補診断の評価におけるあいまいさの処理方法、関連疾患についてのあいまいさをとのように処理すべきか、など解決すべき問題点も多い。

5　おわりに

本システムは、その開発の緒についたばかりであるが、医学知識ベース構築について、種々の知見、問題点がえられた。例えば、シソーラスの整備、表現の統一などである。また、あいまいさの処理が医学知識ベースシステムにとって不可欠であり、さらに検討の必要な事がわかった。

ファジィ集合の概念を用いた
日本語質問応答システムの試作

馬野 元秀
（大阪大学・大型計算機センター）

1．はじめに

最近，自然言語の研究が盛んに行なわれ，多くの自然言語処理システムが作成されている．自然言語には，本質的に多くのあいまいさが含まれているにもかかわらず，あいまいさの取り扱いを十分に考えたシステムはほとんど見当たらない．そこで，あいまいな概念を含む単語を用いることのできる簡単な日本語質問応答システムを試作した．

2．システムの概要

本システムは，文献[1]の Lisp による小型日本語質問応答システム TQAS を VAX-11/780 （OSは VAX/VMS）上のLisp-F3 に移植したものをベースとして，これにあいまいな概念を含む単語を処理する部分を追加して実現した．システム内部ではあいまいな概念を可能性分布[2]で表現し，あいまいな概念を含む単語による質問に対しては，質問中のファジィ集合とシステム内部の可能性分布との満足度を計算し，これに基づいて返答するようにした．

以下，システムとの会話例を示しながら，システムの概略について述べていこう．現在のところ端末機などの都合によりローマ字しか使えないので，本稿ではその次の行に漢字かな混じり文を補ってある．

(1) 平叙文による記述

まず，どのような入力が可能か，例を見てみよう． >が付いた行が人間の入力で， *の付いた行がシステムからの応答である．

```
> akai hakoga tsukueno ueni arimasu.
   （赤い箱が机の上にあります）
* wakarimashita
   （わかりました）

> sono hakowa totemo omoi.
   （その箱はとても重い）
* wakarimashita
   （わかりました）

> aoi hakoga aru.
   （青い箱がある）
* wakarimashita
   （わかりました）
```

> sono hakowa omosaga chuukurai desu.
（その箱は重さが中くらいです）
* wakarimashita
（わかりました）

> kiiroi hanawa maa ookii.
（黄色い花はまあ大きい）
* wakarimashita
（わかりました）

> shiroi hanaga tsukueno ueni arimasu.
（白い花が机の上にあります）
* wakarimashita
（わかりました）

> sono hanawa chiisai.
（その花は小さい）
* wakarimashita
（わかりました）

> kuroi hakowa omosaga 7kurai desu.
（黒い箱は重さが７くらいです）
* wakarimashita
（わかりました）

現在のところ，辞書に登録されている名詞は，

hako（箱），hana（花），mari（まり），tsukue（机），tsumiki （積木）

の５つだけである．

名詞に付けることのできる属性には，

色，大きさ，重さ，長さ

がある．色の属性で使用できる形容詞は，

akai（赤い）， aoi（青い），kiiroi（黄色い）， kuroi（黒い），shiroi（白い）

の５つで，現在のところ，これらはあいまいでないと考えている．大きさ，重さ，長さの属性で使える形容詞は，

<大きさ>	<重さ>	<長さ>
ookii（大きい）	omoi （重い）	nagai（長い）
chiisai（小さい）	karui（軽い）	mijikai（短かい）
	chuukurai （中くらい）	
	nkurai（ nくらい：1 < n < 9）	

で，これらはすべてあいまいであるとし， 0から10までの11段階の尺度上での可能性分布と考える．例えば，大きさの属性の形容詞に対しては，

```
   ookii =  {1/10, 0.92/9, 0.68/8, 0.32/7, 0.08/6} p
 chiisai =  {1/0, 0.92/1, 0.68/2, 0.32/3, 0.08/4 } p
  nkurai =  {0.22/n-2, 0.78/n-1, 1/n, 0.78/n+1, 0.22/n+2 } p
```

と定義してある．ただし，{ } p は可能性分布を表わす．また，chuukurai は 5kurai と同じであると考える．

また，副詞には，色以外の属性の形容詞に対して使えるものとして，

totemo（とても），taihen（たいへん），maa（まあ），sukosi（少し）

がある． totemo と taihen は共に修飾する形容詞の可能性の各々の値を 2乗し，maa と sukosiは 0.5乗している[3]．

上の会話の結果，中期記憶の内容は，

```
tukue ---ue--> shiroi chiisai hana , akai totemo omoi hako
（机 --- 上 ---> 白い小さい花，赤いとても重い箱）
aoi chuukuraino omosano hako
（青い中くらいの重さの箱）
kiiroi maa ookii hana
（黄色いまあ大きい花）
kuroi 7kuraino omosano hako
（黒い 7くらいの重さの箱）
```

となる．

(2) あいまいさを含まない質問

これについては，TQASと同じなので実行例をあげるにとどめる．

```
> akai hakoga tsukueno ueni arimasuka?
  （赤い箱が机の上にありますか）
* hai arimasu
  （はい，あります）

> naniga tsukueno ueni arimasuka?
  （何が机の上にありますか）
* shiroi chiisai hana , akai totemo omoi hako --eeto kore dake desu
  （白い小さい花が花，赤いとても重い箱 － ええっと，これだけです）

> naniirono hakoga arimasuka?
  （何色の箱がありますか）
* kuroiro , aoiro , akairo desu
  （黒色，青色，赤色です）
```

(3) あいまいさを含む質問

まず，実行例をいくつか示そう．

> kiiroi hanawa chiisai desuka?
（黄色い花は小さいですか）
* iie chiisakuwa arimasen
（いいえ，小さくはありません）

> akai kakowa taihen omoi desuka?
（赤い箱はたいへん重いですか）
* hai totemo omoi desu
（はい，とても重いです）

> akai hakowa omoi desuka?
（赤い箱は重いですか）
* hai tabun omoi deshou
（はい，たぶん重いでしょう）

> akai hakowa maa omoi desuka?
（赤い箱はまあ重いですか）
* hai tabun maa omoi deshou
（はい，たぶんまあ重いでしょう）

このような応答をするためには，質問中の対象x についてのファジィ集合に対する，中期記憶のなかの対象x に関する可能性分布Πの満足度を求めることになる．満足度S は

$$S = \{\pi(u) / \mu(u) : u \text{ in } U\}\ p$$

という区間[0,1] 上の可能性分布で与えられる．なお，U は {0,1,2,…,10 } と考えればよい．そして，この結果をしきい値θ（ふつうは0.5)と比べて，$\mu(u) > \theta$となる$\pi(u)$の最大値を$\pi 1$ とし，$\mu(u) < \theta$となる$\pi(u)$ の最大値を$\pi 0$ とすると，次の５つに分類できる．

(a) 真であるT ： $\pi 1 > 0,\ \pi 0 = 0$
(b) たぶん真であるT'： $\pi 1 > 0,\ \pi 0 > 0,\ \pi 1 > \pi 0$
(c) 偽であるF ： $\pi 0 > 0,\ \pi 1 = 0$
(d) たぶん偽であるF'： $\pi 0 > 0,\ \pi 1 > 0,\ \pi 0 > \pi 1$
(e) わからないU ： $\pi 0 = \pi 1$

ただし，これでは$\pi(u)$ と$\mu(u)$ の形が同じときにT'に分類されてしまうので，これに対しては別に調べてT にする．そして，これら(a)-(e) に基づいて，システムは

(a) 真であるT ： hai … desu （はい，…です）
(b) たぶん真であるT'： hai tabun … deshou （はい，たぶん…でしょう）
(c) 偽であるF ： iie …dewa arimasen （いいえ，…ではありません）
(d) たぶん偽であるF'： iie tabun …dewa naideshou （いいえ，たぶん…ではないでしょう）
(e) わからないU ： dochiratomo iemasen （どちらとも，いえません）

のように回答する．

(4) ２つの対象についての質問

２つの対象を比べる質問も可能である．これは，例えば，

> akai hakowa aoi hakoyori zutto omoi desuka?
（赤い箱は青い箱よりずっと重いですか）
* hai tabun zutto omoi deshou
（はい，たぶんずっと重いでしょう）

となる．また， hobo hitoshii（ほぼ等しい）という形容詞を使うこともできる．

> akai hakowa kuroi hakoto omosaga hobo hitoshii desuka?
（赤い箱は黒い箱と重さがほぼ等しいですか）
* iie tabun hobo hitoshikuwa naideshou
（いいえ，たぶんほぼ等しくはないでしょう）

> aoi hakowa kuroi hakoto omosaga habo hitoshii desuka?
（青い箱は黒い箱と重さがほぼ等しいですか）
* hai tabun hobo hitoshii deshou
（はい，たぶんほぼ等しいでしょう）

ここで，ファジィ関係zutto omoi（ずっと重い）のメンバシップ関数は，

$$\mu(u,v) = \begin{cases} 1 & u - v > 3 \\ 0.89 & u - v = 3 \\ 0.5 & u - v = 2 \\ 0.13 & u - v = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義してあり，ファジィ関係 hobo hitoshii（ほぼ等しい）のメンバシップ関数は，

$$\mu(u,v) = \begin{cases} 1 & u = v \\ 0.89 & |u - v| = 1 \\ 0.5 & |u - v| = 2 \\ 0.13 & |u - v| = 3 \\ 0 & |u - v| > 3 \end{cases}$$

と定義してある．

これは，質問のなかのファジィ関係R に対する中期記憶のなかの可能性分布Π1 とΠ2 の満足度を求めることになる．この満足度S は

$$S = \{\min(\pi 1(u1), \pi 2(u2)) / \mu\ (u1,u2) :\ u1 \text{ in } U,\ u2 \text{ in } U\}\ p$$

という可能性分布で与えられる．これも区間[0,1] 上の可能性分布となるので，上と同じように，(a)-(e) に分類して回答をつくればよい．

3．おわりに

以上， VAX-11/780 上のLisp-F3 で作成したあいまいな概念を取り扱うことのできる日本語質問応答システムについて，例をあげて述べた．現在のところ，利用できる単語も多くないし，文法上の制約もかなりきびしいものになっている．今後は，より単語を増加させ，文法上の制約をゆるめて，より広い範囲の日本語を取り扱えるように拡張していきたい．

[参考文献]

1.田中，元吉，山梨：「LISPで学ぶ認知心理学３　言語理解」，東京大学出版会(1983)．

2. L.A. Zadeh, "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility", Fuzzy Sets and Systems, Vol.1, pp.3-28 (1978).

3. L.A. Zadeh, "A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges",Jour. of Cybernetics, Vol.2, pp.4-34 (1972).